Fünfzig Jahre Relativitätstheorie
Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité
Jubilee of Relativity Theory

Bern, 11.—16. Juli 1955

Verhandlungen – Actes – Proceedings

herausgegeben von – publiés par – edited by

ANDRÉ MERCIER ET MICHEL KERVAIRE

Séminaire de Physique Théorique de l'Université de Berne

HELVETICA PHYSICA ACTA

SUPPLEMENTUM IV

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

1956

INHALTSVERZEICHNIS

TABLE DES MATIÈRES

CONTENTS

Organisation und Programm der Konferenz
Organisation et programme de la Conférence
Organization and Program of the Conference

Montag, den 11. Juli 1955

Dienstag, den 12. Juli 1955

10.00 Uhr	*Hauptreferat* Klein (Stockholm): „Generalisations of Einstein's theory of gravitation considered from the point of view of quantum field theory"	58
	Diskussion	68
11.45 Uhr	*Kurze Mitteilungen*	
	Costa de Beauregard (Paris): Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique	72
	Mme Fourès-Bruhat (Aix-Marseille): Le problème de Cauchy dans la théorie relativiste de l'électromagnétisme et dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry	76
Im Hörsaal des Museums	3. Wissenschaftliche Sitzung Vorsitz: Infeld (Warschau)	
15.00 Uhr	*Hauptreferat* Bergmann (Syracuse): „Quantisierung allgemein-kovarianter Feldtheorien"	79
	Diskussion	95
16.45 Uhr	*Kurze Mitteilungen*	
	Bondi (London): The electromagnetic field due to a uniformly accelerated charge, with special reference to the case of gravitational acceleration	98
	Costa de Beauregard (Paris): Complémentarité et relativité	99
	Géhéniau (Bruxelles): Les 14 invariants de courbure de l'espace riemannien à 4 dimensions	101
20.00 Uhr	*Kammermusik-Konzert.* Im Hotel Gurten-Kulm Anschließend Empfang	

Mittwoch, den 13. Juli 1955

Im Hörsaal des Museums	4. Wissenschaftliche Sitzung Vorsitz: Heckmann (Hamburg)	
9.30 Uhr	*Hauptreferat* Trumpler (Berkeley): „Observational results on the light deflection and on red-shift in star spectras"	106
	Diskussion	110

Samstag, den 16. Juli 1955

um 10.30 Uhr

in der Aula der Universität

Teilnehmerliste

Liste des participants

List of Participants

Alexandrov A. D., Prof. Dr., Rektor der Universität Leningrad, Delegierter der Akademie der Wissenschaft zu Moskau
Baade W. F., Prof. Dr. (Mt. Wilson and Palomar Observatories, California)
Bargmann V., Prof. Dr. (Princeton University)
de Beaumont J., Prof. Dr., Président de la Société helvétique de Sciences naturelles, Membre du Comité d'honneur (Lausanne)
Bergmann P. G., Prof. Dr. (Syracuse University)
Blanc Ch., Prof. Dr. (Université de Lausanne)
Bleuler K., Prof. Dr. (Universität Zürich)
Bondi H., Prof. Dr. (King's College, London)
Bonnor W. B., Dr. (Liverpool University)
Born M., Prof. Dr. (Edinburgh und Bad-Pyrmont)
Bose S. N., Prof. Dr. (University of Calcutta)
Cahen M., Dr. (Bruxelles)
Caplan D. I. (Purdue University)
Corinaldesi E., Dr. (Institute for advanced Studies, Dublin)
Costa de Beauregard O., Dr. (Institut H. Poincaré, Paris)
van Dantzig D., Prof. Dr., Délégué de l'Académie Royale néerlandaise des Sciences (Mathematisch Centrum, Amsterdam)
Deser S., Dr. (Institute for theoretical Physics, Copenhagen)
Ehlers J. (Universität Hamburg)
Feitknecht W., Prof. Dr., Dekan der Phil.-naturwiss. Fakultät (Universität Bern)
Fierz M., Prof. Dr. (Universität Basel)
Finlay-Freundlich E., Prof. Dr. (St. Andrews University)
Fock V. A., Prof. Dr., Delegierter der Akademie der Wissenschaften zu Moskau (Leningrad)
Fokine B. (Leningrad)
Fokker A. D., Prof. Dr., Délégué de l'Académie Royale néerlandaise des Sciences (Beekbergen)
Mme Fourès-Bruhat Y., Dr. (Université d'Aix-Marseille)
Géhéniau J., Prof. Dr. (Université Libre, Bruxelles)
Gilbert W. (Trinity College, Cambridge)
Gonseth F., Prof. Dr. (Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich)
Greinacher H., Prof. Dr. (Universität Bern)
Guggisberg K., Rektor der Universität, Mitglied des Ehrenkomitees (Bern)
Gut M., Prof. Dr. (Universität Zürich)
Hackett F. E., Prof. Dr., Delegate of the Royal Irish Academy (Dublin)
Mrs. Harris-Kaufman B., Dr. (Institute for advanced Study, Princeton)
Heckmann O., Prof. Dr. (Universität Hamburg)
Heitler W., Prof. Dr. (Universität Zürich)
Hopf H., Prof. Dr., Präsident der Internationalen mathematischen Union (Eidg. Techn. Hochschule, Zürich)
Houtermans F. G., Prof. Dr. (Universität Bern)
Hoyle F., Prof. Dr. (St. John's College, Cambridge)
Infeld L., Prof. Dr. (Universität Warschau)
Järnefelt G., Prof. Dr. (Astron. Observatorium Helsinski)
Jordan P., Prof. Dr. (Universität Hamburg)
Jost R., Prof. Dr. (Eidg. Techn. Hochschule, Zürich)
Jouvet B., Dr. (C.N.R.S., Paris)
Kervaire M., Dr. (Université de Berne)
Klein O., Prof. Dr. (Hochschule Stockholm)

König H., Prof. Dr. (Eidg. Amt f. Maß und Gewicht, Bern)
Laub J., Prof. Dr. (Fribourg)
von Laue M., Prof. Dr., Direktor der Max-Planck Gesellschaft (Berlin-Dahlem)
Lichnerowicz A., Prof. Dr. (Collège de France, Paris)
Lindt W., Lic. sc. (Universität Bern)
Lucini-Ruiz de Vallejo Manuel, Prof. Dr. (Madrid)
Ludwig G., Prof. Dr. (Freie Universität Berlin)
Mariot L., Dr. (Université de Dijon)
McCrea W. H., Prof. Dr. F. R. S., Delegate of the Royal Society (King's College, London)
Mercier A., Prof. Dr. (Université de Berne)
Moffat J., Dr. (Trinity College, Cambridge)
Moine V., Dr., Conseiller d'Etat, Directeur de l'Instruction Publique, Membre du Comité d'honneur (Berne)
Møller Ch., Prof. Dr., Delegate of the Royal Danish Academy (Copenhagen)
Morf H., Dr., Direktor des Eidg. Amtes für geistiges Eigentum (Bern)
Ozaki S., Prof. Dr. (Kyushu University, Fuluoka)
Papapetrou A., Prof. Dr., Delegierter der Deutschen Akademie der Wissenschaften (Berlin)
Pauli W., Prof. Dr., Präsident der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft, Präsident der Konferenz (Eidg. Techn. Hochschule, Zürich)
Peyrou Ch., Prof. Dr. (Université de Berne)
Pirani F. A. E., Dr. (Institute for advanced Studies, Dublin)
Quan Pham Mau, Dr. (Paris)
Rivier D., Prof. Dr. (Université de Lausanne)
Robertson H. P., Prof. Dr. (Calif. Institute of Technology, Pasadena and S.H.A.P.E., Paris)
Robinson I., Dr. (University of Wales, Aberystwith)
Rosen N., Prof. Dr. (Technion, Haifa)
Sauter J., Dr. (Bureau Fédéral de la propriété intellectuelle, Berne)
Fr. Schaffhauser E., Dr. (Flugzeugwerke, Altenrhein)
Scherrer W., Prof. Dr. (Universität Bern)
Schremp E. J., Dr. (Naval Research Laboratory, Washington D. C.)
Schürer M., Prof. Dr. (Universität Bern)
Signorini A., Prof. Dr., Délégué de l'Academia dei Lincei (Rome)
Steiger O., Stadtpräsident, Mitglied des Ehrenkomitees (Bern)
Stephenson G., Dr. (Imperial College of Science and Technology, London)
Stuekelberg E. C. G., Prof. Dr. (Université de Genève)
Tharrats-Vidal J., Dr. (Salamanca)
Thellung A., Dr. (Eidg. Techn. Hochschule, Zürich)
Thirring H., Prof. Dr. (Universität Wien)
Thirring W., Dr. (Universität Bern)
Tits J., Dr. (Université Libre, Bruxelles)
Mme Tonnelat A., Prof. Dr. (Institut H. Poincaré, Paris)
Trumpler R. J., Prof. Dr. (University of California, Berkeley)
Volland W., Dr. (Universität Bern)
Weyl H., Prof. Dr., Delegate of the National Academy of Sciences, Washington (Institute of advanced Study, Princeton und Eidg. Techn. Hochschule, Zürich)
Wigner E., Prof. Dr. (Princeton University, Princeton)
Zuber K., Prof. Dr. (Universität Instanbul)

(89 Teilnehmer; 89 participants)

Vorwort

Préface

Foreword

Albert Einstein vivait à Berne en 1905 lorsqu'il publia ses premiers mémoires sur la Théorie de la Relativité. En 1954 déjà, il a approuvé le projet d'une Conférence à Berne pour en fêter le jubilé; il a donné depuis son assentiment complet tant à l'organisation qu'au programme de la Conférence. Sa mort, survenue peu de temps avant l'ouverture, a laissé un vide qui n'a pu être comblé que par l'enthousiasme et l'assiduité des participants, la qualité de leurs contributions et le sentiment de la grande amitié qui les a liés tout de suite.

La Théorie de la Relativité marque en somme un terme; elle est l'achèvement d'une physique d'esprit cartésien rendant compte des phénomènes par figures et par mouvements. On pouvait donc craindre qu'une conférence pareille n'apportât que des confirmations et ne soit qu'une démarche – peut-être décisive – vers une perfection formelle. En fait elle a été cela, et c'est déjà une grande et belle chose.

Mais elle n'a pas été, elle ne pouvait pas être seulement cela. Car tout en s'attachant par son puissant esprit à l'élaboration d'une théorie qui fût simple, unifiée et universelle tout à la fois, Einstein avait le respect de la Nature imposant au savant la recherche d'une description adaptée, et il fondait ses spéculations sur une double expérience: L'expérience du monde extérieur révélatrice des données matérielles, énombrales et numériques, et l'expérience d'un monde intérieur ou spirituel, révélatrice de la bonne marche à suivre.

Pour naturelle et acceptable qu'apparaisse cette position épistémologique, elle n'a pas été toujours adoptée et ne l'est pas aujourd'hui par chacun. Les énoncés et les espoirs scientifiques auxquels elle avait conduit notre grand maître n'ont pas tous été approuvés ou reconnus, non pas bien entendu en raison d'une contradiction avec l'expérience, mais à cause d'une hésitation à le suivre dans une voie qui n'apparait pas pavée uniquement de vérités claires et évidentes. Les sujets abordés sont si délicats et difficiles, et leur attaque est à faire sur un front si avancé, qu'une concentration des moyens les plus efficaces était de rigueur.

Cela devait ou pouvait se faire comme suit. D'abord, confronter la théorie générale avec les données les plus récentes de la cosmologie expérimentale, afin que l'on sût s'il resterait des doutes sur une explication totalement satisfaisante des phénomènes à l'échelle astronomique. Puis la présenter sous sa forme mathématique la plus élaborée afin de connaître s'il y a des conséquences ou des généralités qui avaient échappé jusqu'ici. Ensuite aborder les tentatives d'unification connues sous le titre de théories unitaires afin que soient énoncés les derniers arguments censés justifier l'emploi d'un théorie de type einsteinien dans la totalité des explications physico-mathématiques. Cela-même paraissait d'autant

plus nécessaire mais difficile en même temps, que la quantification de tout champ apparait avec une nécessité toujours plus impérieuse bien que moins facile qu'on n'avait pu le penser autrefois. Aussi convenait-il, sinon d'entreprendre une mise au point, du moins de poser le problème de la quantification dans la plus grande généralité, donc de celle de champs utilisés par quelque théorie «très» généralisée.

Un point encore, d'une importance humaine, aurait pu retenir l'attention de la Conférence, c'est l'aspect philosophique. Mais là, il devenait presque impossible de tracer des limites: Il aurait fallu poser question, plus brûlante que jamais, du déterminisme, et c'eût été l'avalanche des physiciens, des logiciens, des théoriciens de la connaissance, et de tous les penseurs en général. Puis on n'aurait pu éviter de traiter de l'influence de la notion einsteinienne de relativité sur la pensée philosophique en général et sur les catégories métaphysiques en particulier. Enfin, non seulement en hommage à la personne d'ALBERT EINSTEIN mais parce qu'il s'agit de valeurs humaines qu'il nous tient à coeur de bien savoir respecter, il aurait fallu chercher à connaître l'interpénétration et à établir l'équilibre entre la Science, l'Art et la Morale; cette dernière tâche parait moins celle d'une Conférence de savants que celle d'un chacun dans sa conception de la vie.

Ne restait-il pas, demandera-t-on, un dernier point, une tâche à la fois ultime et première pour une Conférence qui se pique de fêter le Jubilé d'une si grande découverte et qui se tient au terme de la carrière d'un homme si célèbre: Rappeler l'œuvre total et la vie d'EINSTEIN? Oui certes; cela n'a pas été oublié, mais cela aussi était une entreprise considérable et délicate, et il ne semblait pas qu'EINSTEIN y tînt, bien au contraire, en grand modeste qu'il était. Il était clair que dans l'esprit einsteinien, l'essentiel était de travailler au progrès de nos connaissances et à la recherche d'une unité et d'une simplicité plus profondes.

Toutes ces considérations ont présidé à l'organisation de la Conférence. L'aspect philosophique a été délibérément laissé hors de cause: Il surgit d'une part de lui-même, – sans les faire dévier de leur ligne, – des délibérations strictement scientifiques, et de l'autre, il est implicitement présent dans la Vie et dans l'Œuvre. Il suffisait alors de présenter ces derniers, ce qui fut fait en deux parts: L'une publique (Fête du Jubilé), où parleraient un savant ami et ancien camarade d'EINSTEIN ainsi que le président de la Conférence, l'autre pous les savants, collègues et amis d'EINSTEIN. Pour le détail, on se reportera à la table des matières et au programme reproduit ci-devant.

Les autres travaux ont tous été consacrés à la recherche scientifique. La formation d'un noyau et la répartition des matières ne fut pas très difficile; la plupart des savants sollicités assurèrent leur concours. La

publication discrète des intentions des organisateurs eut un écho favorable, et bon nombre des savants particulièrement intéressés aux débats de la Conférence firent leur possible pour s'y joindre.

La bonne marche de cette Conférence aurait été impossible si le financement n'en avait été assuré, à la faveur du nom d'ALBERT EINSTEIN joint à la compréhension de personnes avisées. Voici à qui l'on en est redevable: La Confédération Suisse par l'organe du Département de l'Intérieur, l'Etat de Berne par celui de l'Instruction publique, la Ville de Berne par son Conseil, la Société Helvétique des Sciences Naturelles (Académie Suisse des Sciences) et la Faculté des Sciences de l'Université de Berne. Quelques contributions privées plus modestes ont comblé les dernières nécessités.

Enfin la publication des Actes de la Conférence a bénéficié d'un concours financier de l'Organisation des Nations Unies pour l'Education, la Science et la Culture.

Tant d'autres d'ailleurs ont droit à leur part de remerciements. Leurs noms figurent tout au long dans la liste des participants, dans le détail des comités et du secrétariat, au bas de la couverture du présent recueil, et il en reste. De près ou de loin, ils ont été serviteurs des théories de la relativité.

On entend dire aujourd'hui que nous vivons à l'ère atomique. Ne pourrait-on aussi bien parler de l'ère relativiste? De préférence, non, bien que la première doive sa floraison pour une bonne part à la théorie de la relativité. La relativité n'est ni la pierre, ni le fer, . . . ni l'or de notre temps. Ce que forment les théories d'EINSTEIN, c'est un noeud d'attache de cette corde sans fin qui, saisie et affermie autrefois par les GALILÉE, les NEWTON et tant d'autres, conduit l'ascension de notre esprit curieux vers le sommet toujours soupçonné mais jamais atteint d'où l'on verrait rigoureusement ce que sont les vraies *harmonices mundi*.

A. M.

Willkommensansprachen

Allocutions de bienvenue

Speeches of welcome

Allocution de bienvenue

par le Dr. V. Moine
Directeur de l'Instruction publique du Canton de Berne

Mesdames, Messieurs,

Au nom des autorités de la Confèderation suisse, du canton de Berne et de la ville de Berne, j'ai l'honneur d'ouvrir le présent congrès et de vous souhaiter la bienvenue la plus cordiale dans notre pays et notre cité.

Le profane qui parcourt le programme de votre congrès ressent quelque émotion à la lecture des titres des causeries et communications scientifiques qui y figurent; l'émotion que devaient ressentir, dans la Grèce antique, les non-initiés assistant aux mystères d'Eleusis.

L'Etat de Berne et la Ville de Berne sont fiers de vous recevoir. Non pas que Berne ait jamais aspiré à devenir le temple de la science. Cette ville, enserrée comme un joyau dans la couronne de l'Aar, au passé militaire et politique qui fit d'elle la tête de la vieille Suisse, pratique et empirique comme une paysanne, a toujours plus apprécié le positif et l'immédiat que le théorique. Ses rues symétriques, son ordonnance, l'equilibre qui se dégage de ses édifices, la prudence traditionnelle de ses lois en font plus une cité d'Aristote que de Platon. Il aura fallu l'initiative de la Faculté des sciences et notamment des physiciens de cette Faculté, malgré les pénibles conditions dans lesquelles ils travaillent, pour que Berne, pendant quelques jours, devienne le centre d'un échange fécond sur les théories de la relativité. Il aura fallu surtout qu'Einstein, alors fonctionnaire au Bureau de la propriété intellectuelle, il y a juste cinquante ans, ait formulé, dans cette même ville de Berne, les premières théories qui devaient bouleverser les connaissances scientifiques. Nous regrettons que la mort ait frappé, il y a quelques mois, celui qui aurait eu sa place d'honneur dans le présent congrès et auquel nous aurions dit, en termes émus, la reconnaissance du peuple suisse et singulièrement de Berne, au savant, au penseur, au philosophe, au citoyen courageux qui, dans les pires circonstances, ne désespéra jamais de la raison humaine et d'un finalisme amenant lentement la société vers le droit et la lumière.

Nous félicitons les organisateurs du présent Congrès d'avoir conservé à celui-ci son caractère scientifique restreint, choisi, permettant à des

savants de communiquer les résultats de leurs recherches et de les mettre en discussion. Un congrès géant, ouvert à tout le monde, n'aurait pas atteint son but.

Je suis heureux de saluer des savants de toutes universités, de toutes langues, de tous continents. Ce fait confirme la mission de la science, cette «belle aventure de l'esprit», comme l'a appelée un écrivain, la plus belle aventure qui soit, puisqu'elle poussa l'homme à la découverte du mystère de la nature et de la connaissance. Laissons aux esprits orgueilleux, qui ne sont pas des savants, le plaisir vain de croire que seules, certaines nations, auraient plus que d'autres, mené le jeu scientifique et constatons avec Einstein que Galilée, Copernic, Newton et Pasteur sont avant tout des citoyens du monde, plus que des génies du lieu, recherchant la vérité ou les éléments qui conduisent à sa découverte, sans souci d'aucun autre ordre.

Einstein, dans cette lignée des géants de la pensée, incarna le type du savant désintéressé, aimant la recherche pour elle-même, sans but pratique immédiat, étant étonné le premier d'avoir bouleversé nos connaissances et créé une optique nouvelle du monde scientifique.

Qui sait? S'il était parmi nous, peut-être nous assurerait-il que l'état de fonctionnaire d'une part, avec ce qu'il exige de ponctualité et de conformisme, et l'ambiance de cette ville, toute d'ordonnance et de mesure, où l'application des thèses passionne plus que les hypothèses, l'auront poussé vers l'aventure scientifique, vers l'évasion de la découverte. Notre pays, notre ville sont heureux et fiers d'avoir abrité la jeunesse d'Einstein, de lui avoir donné, dans nos écoles scientifiques, ce souci de vérité, sans cet apriorisme qui ferait de la science une servile maîtresse, et ce climat de liberté, le seul dans lequel puisse vraiment s'épanouir la recherche scientifique, qui ne doit connaître, comme la nature elle-même, ni bornes ni limites, pour découvrir l'univers dans lequel l'homme s'est trouvé plongé.

Nous souhaitons que le congrès du Cinquantenaire de la théorie de la relativité contribue aux échanges scientifiques. Nous félicitons et remercions publiquement les initiateurs du Congrès, M. le professeur Mercier, ses collègues de la Faculté des sciences, la Société helvétique des sciences naturelles, les milieux scientifiques ayant apporté leur appui.

D'heureuses digressions, concerts, excursions, permettront d'entrecouper votre programme purement scientifique. Sous un ciel d'un bleu que nous désirons olympien, à proximité des Alpes, dans un pays et une ville vous entourant de sympathie, nous sommes convaincus que vorte congrès, tout en aidant à nouer et découvrir des amitiés, aidera à mieux préciser et fixer certains problèmes essentiels pour la théorie de la connaissance et l'avenir de la physique théorique.

Dans ces sentiments, je vous souhaite un heureux séjour dans notre pays.

Opening Talk

by WOLFGANG PAULI
President of the Conference

Ladies and Gentlemen,

I first wish to give a hearty welcome to all of you, who came here from so many countries to contribute to the discussions about EINSTEIN'S ideas on relativity. The original reason for this meeting was the fact, that just 50 years ago EINSTEIN wrote his first paper here in this town of Bern. From my personal knowledge of EINSTEIN I can assure you, that he always had a particular sentimental attitude towards Berne. For instance in his working room at his home in Princeton the visitor could see only a single diploma: it was an honorary membership of the 'Naturforschende Gesellschaft in Bern' signed by ADRIAN and BALTZER.

In a letter to Prof. MERCIER from February 10th he expressed his joy and gratitude about our report on the Jubilee conference, which appeared to him to be promising. He added ,,Es wird sich dabei zeigen, daß die Erwartungen, die an das allgemeine Relativitätsprinzip geknüpft werden, außerordentlich verschieden sind. Dies ist gut so; denn unter uns Wissenschaftlern hat das Philosophenwort ‚der Krieg ist der Vater aller Dinge' nicht den fatalen Beigeschmack, der ihm sonst anhaftet."

It was in the middle of the final preparations for this conference when the sad alarming news reached us, that EINSTEIN is no longer among us. It means, that some of us, who through so many a year enjoyed his warm friendship, will have to get slowly accustomed to it, that from now on they are left without it. It also means that this congress, while objectively occupied with EINSTEINS work, should at the same time be a farewell to the man.

By this unforeseen event this important moment is a turning point in the history of the theory of relativity and therefore of physics.

Let us hope that EINSTEIN'S wisdom, which is for me always clearly visible even in what I believe to be his errors, will be a good guide to the reports and discussions of this conference and will show us the right way towards the future.

Glückwunsch-Adressen gelehrter Gesellschaften

Messages de Sociétés Savantes

Messages from learned Societies

Les messages suivants, rangés dans l'ordre alphabétique des pays représentés, ont été prononcés ou lus par les savants indiqués.

ANGLETERRE, Message prononcé par W. H. McCrea, Délégué de la Royal Society de Londres.

I have the privilege of representing the Royal Society at this meeting. It is a great pleasure to express to Professor Pauli and the other members of the Organizing Committee the Society's felicitations on the Jubilee which we are now celebrating. I have the honour of conveying the very good wishes of the Royal Society for the success of this Conference.

BELGIQUE, Message prononcé par J. Géhéniau.

Mesdames, Messieurs,

Je veux dire ici combien cette initiative de célébrer le cinquantenaire de la théorie de la Relativité a été appréciée par les physiciens et les mathématiciens belges.

La Relativité générale a été introduite en Belgique dès sa création par le professeur De Donder. Ses contributions à cette théorie ainsi que celles du chanoine Lemaître sont bien connues et la Relativité continue à susciter chez nous un vif intérêt. Aussi les participants belges à ce Congrès tiennent à exprimer au Comité d'organisation leurs remerciements pour l'aimable accueil qui leur a été réservé. Ils rentreront en Belgique avec une connaissance meilleure et plus vaste de la Relativité, ce qui leur permettra de mieux travailler au développement de cette partie de l'œuvre d'Einstein.

DANEMARK, Message du professeur Niels Bohr, Président de l'Académie Royale des Sciences de Danemark, lu par Chr. Møller.

The Royal Danish Academy of Science and Letters wish to join in the tribute offered by the Jubilee Conference on the Theory of Relativity in Berne to the memory of the great genius who widened the

with the other learned bodies represented here in the presentation of felicitations to the Swiss Organisation Committee of the Conference of the Jubilee of Relativity Theory.

The Proceedings of the Royal Irish Academy have been enriched in recent years by contributions, close to the topics discussed by this conference, coming from SCHRÖDINGER, HEITLER, SYNGE and their fellow workers in the School of Theoretical Physics in the Dublin Institute for Advanced Studies.

May I, therefore, as chairman of the Governing Board of the School of Theoretical Physics unite the School with the felicitations of the Royal Irish Academy.

EAMON DE VALERA, the founder of the Dublin Institute for Advanced Studies some twenty years ago, will rejoice to learn that more than 10 per cent of the participants of this Conference have been associated with the School of Theoretical Physics in one way or another.

We, of the Institute, regret that SCHRÖDINGER, the inspiring Director of the School, has not been able to come here also.

In conclusion, may I express my appreciation of the simplicity of style in the organisation of this Conference so much in keeping with the essential simplicity that characterised the great man whose work we are commemorating.

ISRAEL, Message prononcé par NATHAN ROSEN.

In the course of this conference a number of speakers have brought messages from academies of various countries. Israel, a very small country, but with a great interest in EINSTEIN, does not have as yet an academy of science. However, there does exist the Israel Physical Society, and I was asked to represent it at this conference by its president, Prof. RACAH. On behalf of this organization of physicists I therefore bring you greetings and the wish that this conference, together with the memory of EINSTEIN which it honors, will serve as an inspiration for much fruitful work in the future.

ITALIE, Message prononcé par A. SIGNORINI, Délégué de l'Accademia dei Lincei à Rome.

Ho l'onore di dichiarare l'adesione a questo Giubileo dell'Accademia che può vantarsi di avere avuto tra i suoi Soci anche GALILEO GALILEI: ALBERTO EINSTEIN apparteneva ad essa dal 1921. Ricordo bene la data, perchè il tanto compianto mio Maestro TULLIO LEVI-CIVITA volle un certo giorno farmi leggere la relazione, l'entusiastica relazione da lui scritta per proporre la nomina.

L'adesione dell'Accademia dei Lincei è di circa un anno fa, quando EINSTEIN ancora viveva e neppure era prevista l'immatura fine di ENRICO FERMI. In questi ultimi mesi si sono avute in Italia due celebrazioni del cinquantenario della Relatività.

Tra aprile e maggio si è svolto tutto un ciclo di conferenze all'Istituto nazionale di Alta Matematica e sono certo che il Presidente dell'Institute, FRANCESCO SEVERI, se fosse qui vorrebbe ripetere i più vivi ringraziamenti al prof. INFELD per il suo contributo al sucesso di quella manifestazione.

Negli stessi giorni è stata condotta a termina la stampa di un poderoso volume dal titolo «Cinquant'anni di Relatività». L'idea di questa publicazione è dell'ing. MARIO PANTALEO, direttore generale al Ministero italiano della Publica Istruzione. Nelle sei o settecento pagine di grande formato, dopo un'introduzione generale dell'ing. Pantaleo e prima della traduzione in italiano di tutte le Memorie fondamentali di EINSTEIN, sono contenuti scritti di Armellini, il direttore dell'Osservatorio astronomico di Monte Mario, del prof. FINZI del Politecnico di Milano, del prof. POLVANI, direttore del «Nuovo Cimento», di Severi, di PAOLO STRANEO e di altri.

So che alcuni dei presenti sono già a conoscenza di tale volume. Comunque, mi sia permesso di terminare il mio dire richiamando l'attenzione sulla prefazione, costituita da un certo numero di pagine appositamente scritte da ALBERTO EINSTEIN il 4 aprile di quest'anno, cioè solo due settimane prima della morte.

Si tratta, in certo modo, di un testamento scientifico, che si conclude, ciò che pure impressiona, con una dichiarazione di estrema umilità rispetto ai limiti delle conoscenze umane: io ritengo, dice EINSTEIN nelle ultime righe, che siamo molto lontani dal possedere una base concettuale della fisica alla quale poterci in qualche modo affidare. Il testo originale è il seguente:

„Die letzteren, flüchtigen Bemerkungen sollen nur dartun, wie weit wir nach meiner Meinung davon entfernt sind, eine irgendwie verläßliche begriffliche Basis für die Physik zu besitzen.".

PAYS-BAS, Message prononcé par A. D. FOKKER, Délégué de l'Académie Royale Néerlandaise.

Ladies and Gentlemen,

One may be sure that it is quite in the spirit of ALBERT EINSTEIN that we should first of all here discuss scientific problems and not speak of his person. Nevertheless, it is impossible to leave him out of our thoughts.

The Royal Netherlands Academy of Sciences, which sent us as delegates, wishes to convey a message to testify of its highest esteem and profound gratitude, and professor MERCIER pointed out to us, that this now might be the right moment to do so.

Fairly often EINSTEIN attended the meetings of the Netherlands Academy as a member. He had many good friends there who liked to have him in their midst and who loved him, and we are proud and grateful that we may believe he reciprocated our feelings.

You know that after the first world war a special chair was created for him in Leiden University to enable him as a guest to spend some time every year in Leiden.

This was done in 1920 and for a dozent of years we had the privilege of his stimulating annual visits. Professor BARGMAN just brought over from Princeton the letters which professor LORENTZ wrote to EINSTEIN when preparing this chair. One of these bears a somewhat emotional character. It was written after the first attack had been launched on EINSTEIN in Germany. LORENTZ wanted to show his sympathy. From this letter, which is now in my hands, I wish to quote a few lines.

> Alle, die Ihre Arbeiten kennen und Ihnen in Ihren Forschungen gefolgt sind, wissen, daß Sie in aller Bescheidenheit bestrebt gewesen sind, die Wahrheit zu suchen und ihr zu dienen. Wer Sie persönlich kennt, ist davon doppelt überzeugt. Das gilt von Ihren Freunden in diesem Lande und glücklicherweise auch von den besten der deutschen Physiker.
>
> That is: All those, who know your papers und who have followed you in your investigations, also know that in utmost modesty you have been striving to search for truth and to serve truth. One who personally is acquainted with you is twice convinced of that. This applies to your friends in this our country and fortunately to the best of German physicists too.

The Royal Netherlands Academy of Sciences, after thirty-five years still adheres to these words, written by its former great leader, and is grateful to remember how EINSTEIN embodied the ideal so soberly outlined in these few lines. Perhaps it was his modesty, which made EINSTEIN retain the name of relativity theory for what in fact has shown to be far more: a new science of absolute relations of space and time which well deserved to be named chronogeometry.

That new science has confronted the world with serious problems. Mankind cannot undo its inventions. It has to face the consequences of the relation between energy, momentum and mass. It has to find a way out of the terrible dangerous situation, created by the vulcanic energies now at its disposal. EINSTEIN was fully aware of the responsibility of scientists in this respect.

The Royal Netherlands Academy of Sciences wishes to pay its tribute to the great genius which dwelt in ALBERT EINSTEIN. A mortal man like ourselves he revealed to us a great sternity.

POLOGNE, Message prononcé par L. INFELD, Délégué de L'Académie Polonaise des Sciences à Varsovie.

Before I open the meeting, allow me to say a few words in the name of the Polish Academy of Science, which I have the honor to represent here. I should like to express its great appreciation of the work of the organizing committee in preparing this splendid meeting. I should also like to express the Polish Academy's best wishes for the great scientific success of this meeting to commemorate 50 years of Relativity Theory and the death of its great founder.

RÉPUBLIQUE FÉDÉRALE ALLEMANDE, Message prononcé par O. HECKMANN, président de la Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte.

Verschiedene Teilnehmer dieser Konferenz haben im Auftrage der nationalen Akademien ihrer Länder oder anderer gleichbedeutender Organisationen Begrüßungsworte an die Konferenz gerichtet oder Adressen verlesen.

Es ist vielleicht für die Situation in unserem Lande bezeichnend, daß dort schwer eine Organisation zu finden ist, die einen solchen Auftrag hätte geben können.

So spreche ich nicht mit einem eigentlichen Auftrag und doch als Vorsitzender der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte im Namen vieler.

Die Möglichkeit, Fragen der Relativitätstheorie frei zu behandeln, war unserem Lande durch eine Reihe von Jahren genommen. Wir sind den Veranstaltern dieser Konferenz dankbar, daß wir an ihr teilnehmen und daß wir in Freiheit wieder jene Probleme erörtern können, deren Behandlung damals in unserem Lande – von außen unsichtbar – gleichsam in Katakomben weiterlebte.

Wir haben die Hoffnung und bitten um Ihrer aller Hilfe, daß die Arbeit in dem Felde, das ALBERT EINSTEIN eröffnete, auch in unserem Lande wieder zu kräftigem Leben gedeihen möge.

URSS, Message prononcé par V. A. FOCK, Délégué de l'Académie des Sciences de l'URSS.

En ouvrant la séance que j'ai l'honneur de présider je voudrais présenter les salutations de la part de l'Académie des Sciences de l'Union Soviétique et de mes collègues russes. Je suis convaincu que notre réunion sera non seulement très interessante en elle-même, mais aussi qu'elle donnera naissance à des liens scientifiques qui seront durables.

Wissenschaftliche Beiträge samt Diskussion derselben
Contributions scientifiques et interventions dans leur discussion
Scientific Papers and their Discussion

Die Hauptreferate und deren Diskussion sowie die kurzen Mitteilungen samt deren Diskussion werden hiernach in der gleichen Reihenfolge gedruckt, wie sie gehalten worden sind.

Les exposés principaux et leur discussion, ainsi que les brèves communications avec leur discussion, sont reproduits ci-dessous dans l'ordre suivant lequel ils ont eu lieu.

The main lectures and their discussion, as well as the short ones with the discussions, are printed hereafter in the same order as they have been delivered.

Observational Data on World Expansion

by W. F. BAADE (Mt Wilson and Palomar)

Prof. BAADE's lecture has taken place as indicated in the program. However, no manuscript has been submitted to the editors.

Zur Kosmologie

von M. v. Laue (Berlin)

In allgemein kovarianter Schreibweise lauten die Maxwellschen Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0\,,$$

$$\sum_{klm} \frac{\partial}{\partial x^{k}} \left(\sqrt{-g}\, g^{il}\, g^{km}\, \mathfrak{M}_{lm}\right) = 0\,.$$

Für die Maßbestimmung

$$ds^2 = R^2\,(d\sigma^2 - dt'^2)\,,$$

wobei R Funktion von t' allein ist, sind die Koeffizienten der zweiten Maxwellschen Gleichung unabhängig von R, also auch von t'. Infolgedessen gibt es Lösungen von der Form

$$\mathfrak{M}'_{ik} = \mathfrak{M}'^{0}_{ik}\, e^{i\nu' t'}$$

mit konstantem ν' und nur von den Raumkoordinaten abhängigen Amplituden $\mathfrak{M}'^{0}_{ik}$. Geht man nun mittels der Substitution

$$t' = c \int_0^t \frac{dt}{R}$$

zu der Maßbestimmung

$$ds^2 = R^2\, d\sigma^2 - c^2\, dt^2$$

über, so transformiert sich die Schwingungszahl nach der Gleichung

$$\nu' \frac{c}{R} = \nu\,,$$

aus welcher folgt:

$$\nu R = \text{const.}$$

Darin liegt die Theorie der Hubbleschen Rotverschiebung an fernen Nebeln. Sie unterscheidet sich dadurch, daß die Änderung während der Laufzeit des Lichts allmählich eintritt, von dem eigentlichen Doppler-Effekt, bei welchem sie sich auf einmal, am Orte der Lichtquelle, einstellt.

Diskussion – Discussion

P. G. Bergmann: Zu welchen Schlüssen würde man kommen, wenn man die physikalische Idee dieser Arbeit ohne die Annahme eines speziellen Linienelements verfolgt und sich dadurch die Möglichkeit offenhält, die Metrik auf Grund von Beobachtungen zu konstruieren?

M. v. Laue: Die ganze Überlegung beruht auf einer mathematischen Vereinfachung, die nur möglich ist bei der hier angenommenen Form eines Linienelementes. Solange man nicht diese Annahme macht, läßt sich nur aussagen, daß im allgemeinen die Schwingungszahl des Lichtes beim Fortschreiten nicht erhalten bleibt. Aber *wie* sie sich ändert, das läßt sich, soweit ich sehe, in einer allgemein gültigen Form nicht beantworten.

The Space-time of the Theory of Relativity

by A. ALEXANDROV (Leningrad)

1. The space-time relations are defined by the interaction of things and phenomena; they are neither defined nor do they exist by themselves. Respectively, the structure (geometry) of the space-time is defined by general laws of interaction and the theory of the space-time must deduce its properties from these laws. Being a theory of the space-time the theory of relativity was evolved just in this way, for A. EINSTEIN had set as its cornerstone the law of the propagation of light.

2. The theory of the space-time may be based upon the fundamental and general fact that each phenomenon acts upon some others.

If we define an event as a point-phenomenon, the space-time may be defined as the set of all the events, in which all the properties are abstracted with the only exception of those which are defined by the relation: one event acts upon another. Such an abstraction makes it more convenient to say that one event precedes another. The structure of the space-time is defined by this relation of precedence.

A construction of the theory based upon the concept of precedence was given by A. ROBB. His system is analogous to the axiomatic of the elementary geometry and includes 21 postulates.

3. The fundamental properties of the space-time of the special theory of relativity may be expressed by means of the following postulates, provided the above definition of the space-time is taken for granted.

(1) The space-time is a four-dimensional manifold (its topology being suitably defined by means of the relation of precedence).

(2) The space-time is homogeneous, i.e. any two pairs of events A, B and A′, B′ with the same relation of precedence being given, there exists a mapping of the space-time on itself, which preserves the precedence and juxtaposes A, B to A′, B′.

The first postulate includes the boundedness of the velocity of propagation of actions. The second one expresses the principle of relativity.

We can prove, though yet under some additional conditions of analytical character (as, e.g., differentiability of the manifold), that these two postulates define the space-time of the special theory of relativity. I.e.

there exist systems of coordinates by means of which the mappings preserving precedence are expressed as LORENTZ-transformations with an addition of proportional changes of all the scales.

4. The proposed approach to the theory of the space-time allows to enlighten some fundamental features of the special as well as the general theory of relativity. This theory is the theory of the space-time as a form of existence of matter. Not the relativity but the structure of the space-time defined by the matter, not the relative which is but an aspect of the absolute, but the absolute constitutes the true kernel of the theory.

Diskussion – Discussion

A. D. FOKKER: (After recalling ROBBS earlier axiomatic approach): Does the light-cone follow from your axioms?

A. ALEXANDROV: Yes, this is just my statement. However, one has to suppose the manifold to be differentiable.

S. N. BOSE: If you assume that you have a differentiable space and time, you are really borrowing from the ordinary concept of space and time and you are only translating in mathematical language and formulae the things which are familiar. You started with very abstract statements about events; now, if you want to locate these events, you are taking in a particular space; in fact, you define events in terms of concepts with which we are familiar, you are not really going behind these concepts.

A. ALEXANDROV: As soon as we are speaking of a manifold, of dimensions, of points and so forth we are borrowing from the ordinary concept of space. It is impossible to say anything concerning the space-time and not to borrow from the ordinary concepts. And nevertheless we can penetrate into the nature of space-time much deeper, than the ordinary concepts allow. Axiomatics of the elementary geometry is an example.

H. P. ROBERTSON: I agree with FOKKER, that it is good to revive the axiomatic attack, which has been much neglected since the early work of ROBB. What I should like to ask is what is it in your treatment which lead you to the Minkowski space-time, to the exclusion of the De Sitter space-time, which has the same degree of homogeneity.

A. ALEXANDROV: Among the spaces of constant curvature the space of zero-curvature has the highest degree of homogeneity, for it allows transformations of similitude. The possibility to transform a pair of points (events) into another pair, supposed in my third postulate, without any condition of equality of intervals, or any other similar condition, provides the possibility of transformations of similitude and thus ensures the space to be a flat one, i.e. Minkowskian one.

Espaces homogènes et isotropes de la Relativité

par J. Tits (Bruxelles)

1. Soit V_4 une variété à 4 dimensions munie d'une métrique de Riemann de signature $+ - - -$. V_4 est *homogène* si elle possède un groupe transitif d'isométries. Nous dirons qu'elle est *isotrope* (sous-entendu: pour les directions lumineuses) en un point p donné si les isométries conservant p sont transitives sur les directions lumineuses ($ds^2 = 0$) issues de ce point; on peut voir que cette condition est équivalente à la suivante (*isotropie d'espace*): il existe en p un élément plan ω à 3 dimensions de genre espace tel que les isométries conservant p et ω soient transitives sur les directions issues de p dans ω.

2. Les seules V_4 homogènes et isotropes sont

l'espace de de Sitter D_4, c'est-à-dire l'extérieur d'une hyperquadrique de signature $+ - - - -$ dans l'espace projectif P_4 à 4 dimensions muni de la métrique cayleyenne, et son revêtement double $D_4^{(2)}$;

l'«intérieur» C_4 d'une hyperquadrique de signature $+ + - - -$ dans P_4 muni de la métrique cayleyenne, et ses divers revêtements (revêtements finis $C_4^{(n)}$ et revêtement universel $C_4^{(\infty)}$);

les produits $M_4 = K_3 \cdot L$, où K_3 est un espace euclidien E_3, elliptique F_3, sphérique S_3 ou hyperbolique H_3 à 3 dimensions, et où L est l'ensemble R des nombres réels ou l'ensemble R_a des nombres réels modulo a (a donné), M_4 étant muni de la métrique $-ds_K^2 + dt^2$, où ds_K est la métrique sur K_3 et t est une variable dans L (en particulier, $E_3 \cdot R$ est l'espace de Minkowski);

l'espace A_4 des variables x, y, z, t muni de la métrique $-a^t \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$ (identique à l'espace de de Sitter dont on a retiré un hyperplan tangent à l'absolu);

l'espace B_4 obtenu à partir de $S_3 \cdot R_a$ défini plus haut en identifiant les couples de points «diamétralement opposés» (p, t) et $(p', t + a/2)$ (p et p' = points diamétralement opposés sur S_3).

3. Parmi les espaces précités, seuls D_4, $D_4^{(2)}$, $C_4^{(\infty)}$, $K_3 \cdot R$ et A_4 sont infinis dans le sens du temps (non-existence de ligne de temps fermée).

4. Des définitions de l'homogénéité et de l'isotropie analogues à celles du n^0 1 peuvent être données pour les variétés V_4 munies seulement d'un champ de cônes quadratiques $ds^2 = 0$ de signature $+ - - -$, en remplaçant les isométries par les transformations conservant ce champ (transformations conformes). Les espaces homogènes et isotropes ainsi définis sont, en plus de ceux obtenus par abstraction à partir des espaces du n⁰ 2, l'«espace de MINKOWSKI conforme» (surface d'une hyperquadrique de signature $+ + - - - -$ dans l'espace projectif P_5) et ses divers revêtements (finis et universels).

5. En recherchant les V_3 riemanniennes de signature $+ - -$ qui sont homogènes et isotropes dans un sens analogue à celui du n⁰ 1, on trouve, outre les équivalents tridimensionnels des espaces du n⁰ 2, des espaces nouveaux $N(K_2, L, b)$ qui peuvent être caractérisés comme suit: $N(K_2, L, b)$ est fibré de base $K_2 = E_2$, S_2 ou H_2 (cf. n⁰ 2) et de fibre $L = R$ ou R_a, et si U désigne un voisinage de coordonnées dans K_2, la métrique de N dans $U \cdot L$ est donnée par $ds^2 = -ds_K^2 + (dt + b\,\varphi_K)^2$, où b est une constante donnée et φ_K est une forme de PFAFF dans U dont l'intégrale le long de la frontière d'un domaine quelconque mesure l'aire de ce domaine. Lorsque $K_2 = S_2$, on doit avoir $L = R_a$, et a/b doit être un sous-multiple de l'aire totale de K_2.

On the Relation Between Geometry and Physics and the Concept of Space-time

by D. van Dantzig (Amsterdam)

1. Since olden times it has been assumed that the concepts and theorems of geometry are prerequisite to those used in mathematical models of other parts of physics [1]. The reasons for this priority relation, however, seem to be of a historical and traditional rather than of a logical nature. This holds for Euclidean and for Riemannian geometry, introduced by Einstein as a model for gravitation, as well as for the later five-dimensional and projective generalizations, and the more recent general linear connexions, used by Einstein and Schroedinger. It is not quite clear which logical or epistemological advantage there is in interpreting a part of a geometrical object as an electromagnetic field, say, and not vice versa.

2. In rational mechanics the motion of a system is completely described by means of the Hamiltonian function, which has a direct physical meaning. Geometry enters only implicitly in the equations, in general through the kinetic as well as the potential part of the Hamiltonian H, i. e. through the identity, linking energy with momentum (together with the coordinates). As long as this relation is not specified, the equations remain independent of any special geometry.

3. It was found that a similar situation is present in other parts of physics (electromagnetism, thermo-hydrodynamics). The complete set of equations can be split into a) a set of 'fundamental equations' which describe relations between the physical quantities without intervention of geometry, and b) a set of 'linking equations', linking energies and momenta or their kinetic or potential parts. As long as the latter remain unspecified (i. e. contain unspecified functions), we have a kind of 'generalized physics', analogous with Hamiltonian dynamics; their specification will in general require geometrical, and even metrical assumptions.

4. The 'linking equations' are often of a less general character than the 'fundamental equations' [9]. E. g. in classical pointmechanics they express the proportionality of the (kinetic) momentum vector (Newton's

'impetus') with the velocity; in relativistic point-mechanics the proportionality of the (kinetic) momentum energy vector with the relativistic velocity $i^h = dx^h/ds$. In relativistic quantum dynamics, however, the former is (taking $c = 1$) the vector operator $p_i - e\varphi_i$, whilst the latter is the vector operator γ^i and these operators are entirely unconnected. In most cases the metrical nature of the linking equations depends upon implicit assumptions of a metrical nature, e. g. assumptions of isotropy, and lose this character if the isotropy is violated. Even the isotropy of the vacuum might get lost in the presence of a directed beam of radiation, of neutrinos or of mesons, say; i. e. the linking equations in vacuo depend on the 'nature' of this vacuum and have their usual metrical form only if special (though usually valid) assumptions of a metrical nature are satisfied.

For these reasons one might be inclined to consider metrics as describing some 'normal' state of matter (inclusive radiation) and to give it a *statistical* interpretation as some kind of average of physical characteristics of surrounding events, instead of laying it at the base of the whole of physics. Also the fact that e. g. measurement of length requires rigid bodies, i. e. large numbers of particles, points to a statistical interpretation. It is, however, not yet known, *how* such a statistical interpretation of metric can be obtained[1]).

Such a statistical interpretation of metrics does not, of course, deny its physical reality (like in the case of temperature), which hardly will be denied by anyone who ever has been pricked by a needle, i. e. who has *felt* its rigidity and the smallness of its curvature.

5. In electromagnetism [2], [3] the Maxwell equations themselves can be written in a form independent of geometry, by means of 'natural differential invariants' only, whereas one form of the linking equations [3.5] is obtained by writing the expression of the potential covector φ_i at a world-point P by means of retarded potentials formally as a four dimensional integral of the current vector density $\mathfrak{s}^{j'}(P')$ (actually it is degenerate in the case of electromagnetism; it vanishes not only in the exterior, but also in the interior of the light cone of the past; this is not so in the case of meson theory)

$$\varphi_i(P) = \int \gamma_{ij'}(P, P')\, \mathfrak{s}^{j'} dU' \tag{1}$$

where P and P' are two 'worldpoints' (points of space-time), φ_i are the retarded potentials, $\mathfrak{s}^{j'}$ the current-density, dU' a (4-dimensional) element

[1]) In particular I cannot see H. G. Küssner's considerations, who in his book *Principia Physica*, has kindly reported several of my ideas, as a fulfillment of this program. I also believe his appraisal of my ideas to be exaggerated, and I do not subscribe to his criticisms of Einstein, whose ideas doubtless have been fundamental for the whole subsequent development of physics.

at P' and $\gamma_{ij'}(P,P')$ a 'two point quantity', transforming as a covector (= covariant vector) at P as well as at P'. Metrical specialization in the case of an electromagnetic field in empty space gives (in HEAVISIDE-LORENTZ units)

$$\gamma_{ij'}(P, P') = -g_{ij} \frac{\delta(r - ct + ct')}{4\pi r} \tag{2}$$

where $t = t_P$, $t' = t_{P'}$, r is the special distance ($r > 0$) between P and P', and δ is the Dirac function, so that $\gamma_{ij'}$ is $\neq 0$ (and singular) only if P' is on the light cone of the past of P. Formally it is not relativistically invariant, but it can also be written as

$$\gamma_{ij'}(P, P') = g_{ij} \Box \frac{\iota(r - ct + ct')}{8\pi} \tag{3}$$

(where $\iota(x) = \begin{cases} 1 \; if \; x \geqq 0 \\ 0 \; if \; x < 0 \end{cases}$ is HEAVISIDE's 'unit function'), showing that it is invariant under the 'half' Lorentz-group, leaving the two halves of the light cone ('past' and 'future') each separately invariant. (Interchange of these interchanges retarded and advanced potentials). It is not clear, how the condition of invariance under the *full* Lorentz group (including reversal of time) is justified. It seems rather to lead to several difficulties in modern physics, as e.g. the occurrence of numerous 'spook-particles' (antiparticles).

The fundamental nature of the quantities $\gamma_{ij'}$ can also be seen from the fact [3.5] that quantization of the field according to BOHR-ROSENFELD yields equations which, in the metrical specialization used there, are equivalent with

$$[\varphi_i(P), \varphi_{j'}(P')] = -\hbar c i \{\gamma_{ij'}(P, P') - \gamma_{j'i}(P', P)\}. \tag{4}$$

The differences in the right hand member are invariant under the full Lorentz-group, and can be expressed also by the Jordan-Pauli D-function.

In thermo-hydrodynamics [4] the fundamental quantities describing the macroscopic motion of homogeneous matter with respect to any 3-dimensional element dV with components $d\mathfrak{V}_i$ are: the number of particles $N^{dV} = \mathfrak{N}^h d\mathfrak{V}_h$ whose worldlines intersect dV and their momentum and energy $P_i^{dV} = \mathfrak{P}_i^h \, d\mathfrak{V}_h$. In the force-free relativistic specialization $(-\mathfrak{g})^{-1/2} g_{hj} \, \mathfrak{P}_i^h$ equals the stress tensor T_{ij}. Putting for simplicity $k = c = 1$ the temperature T enters into the theory in the form of the fundamental invariant differential $d\tau = T\,dt$, or also of the temperature vector $\vartheta^i = dx^i/d\tau$, the time component of which is $1/T$, whilst its space-components are $1/T$ times the ordinary (macro-) velocity of the fluid. In the relativistic specialization $d\tau = T_0\,ds$ and $\vartheta^h = 1/T_0 \, i^h$, T_0 being the

proper temperature. Space lacks to go into the hydrodynamical equation [5] or into the kinetic gas theory [6].

7. Although the above considerations are of an epistemological nature rather than of practical physical importance, two more or less concrete results may be mentioned. Firstly the following small, though in principle measurable, new relativistic effect was discovered [4]. If a fluid is 'perfect', i.e. has negligible internal friction if observed by an observer in rest with respect to its relative motion, but non-negligible heat-conductivity, then it will in general not appear as a perfect fluid to a moving observer. If e.g. it flows with high velocity between two walls having different temperatures, then the flow of heat caused by the temperature-gradient, i.e. the energy current, will be accompanied by a momentum-current, i.e. an apparent internal frictional force, retarding the hotter part of the fluid relative to the colder part. Fluids which are perfect with respect to *every* observer, however moving, were called 'perfectly perfect'. These are the fluids which had hitherto been considered in R.T., and represented by their stress tensor

$$T_{ij} = p\,g_{ij} - (\varrho + p)\,i_i\,i_j \qquad \left(i^h = \frac{dx^h}{ds}\right) \tag{6}$$

Their equations of motion — leaving the entropy constant — have been studied in greater generality [5].

Secondly an old question of interpretation could be settled decisively [7]. Schwarzschild interpreted ϱ in (6), i.e. $-T_{44}$ if $i_4 = 1$, $i_1 = i_2 = i_3 = 0$, as the 'proper density' of the fluid. Eddington, interpreting the term 'proper density' as the *particle* density multiplied (for $c = 1$) with the proper mass m_0, criticized Schwarzschild and stated that this density were equal to $-T_i^i = \varrho - 3\,p$. Synge showed that the latter result by Eddington was wrong and returned to Schwarzschild's formula. The non-metrical theory leads to the unequivocal result that for a general fluid the particle density is not determined at all by T_{ij} alone, i.e. that both Eddington and Synge were right in their *critical* parts, but (like Schwarzschild) wrong in their positive affirmation. In general the particle density can only be expressed by T_{ij} together with the proper temperature. For the case, however, of an ideal gas of not excessively high temperature, the proper density is in first approximation just the mean of the values proposed by Schwarzschild-Synge and by Eddington. The difference $3\,p/2$ between ϱ and the proper density is that between the proper mass density of the fluid and the (smaller) density of the sum of the proper masses of the molecules constituting it, i.e. in first approximation the kinetic energy density as seen by an observer moving with the fluid.

8. The foregoing considerations have lead to a program of considerably wider scope. This is based upon the following facts. Firstly it is impossible, not only to *measure* physical quantities with unrestricted accuracy, but already to *define* them in such a way, so that infinitesimals and even real numbers in the mathematical sense, hence also differential equations, can enter only into a highly idealized or, rather, simplified model of observable phenomena. Secondly, whereas spatial and temporal *relations* between observable phenomena have certainly an empirical background, this is not the case with the concepts of space and time (or space-time) themselves; these form a non-empirical kind of 'duplication' of the set of observable events. Thirdly the relativistic relationship between space and time is somewhat disturbed by the spatial atomicity together with the temporal continuity of matter. These reasons make it desirable to strive for a more realistic model of physics in the form of a so-called 'flash-model' [1], [8], where matter is represented by a *finite* number of finite groups of elementary events, called flashes, where the finite groupings represent the momentum energy as well as the spatio-temporal relations.

The program of eliminating from the foundations of mathematical physics the concept of a space-time continuum and replacing it by a finite set of discrete events with space-time relations between them can be supported by the same type of argument which originally lead EINSTEIN to the special and the general theory of relativity: physics does not provide us with any means of defining empirically the elements of space-time, i.e. the world-points, i.e. possible events with coordinates to be defined with *infinite* accuracy. For this purpose the replacement of the differential equations of physics by the equivalent integral equations (from which they often have been derived, and which alone have a direct physical meaning) is important, as the integrals can easily be interpreted as mathematical idealizations of sums over a large but finite number of events ('flashes').

The correct appraisal of the role of metrics in physics is the only and preliminary part of the program which hitherto could be carried out to a certain extent. Although this could be considered as a bad omen, it is the author's present conviction that this is due to the many gaps in his knowledge of physics rather than to an essential defect of the program as such.

References

[1] *Some possibilities of the future development of the notions of space and time*, Erkenntnis *7* (1938), 142–146.

[2] *The fundamental relations of electromagnetism independent of metrical geometry*, Proc. Phil. Soc. Cambr. *30* (1934), 421–427.

[3] *Electromagnetism, independent of metrical geometry, 1. The foundations*, Proc. Kon. Ak. *37* (1934), 521–525.
5. Quantum-theoretical commutativity relations of lightwaves, Proc. Kon. Ak. *39* (1936), 126–131.

[4] *On the phenomenological thermodynamics of moving matter*, Physica *6* (1939), 673–704.

[5] *On the thermo-hydrodynamics of perfectly perfect fluids*, Proc. Kon. Ned. Ak. *43* (1940), 387–402; 609–618.

[6] *On relativistic gas theory*, Proc. Kon. Ned. Ak. *42* (1939), 601–607.

[7] *Stress tensor and particle density in special relativity theory*, Nature *143* (1939), 855.

[8] *Vragen en schijnvragen over ruimte en tijd*, Inaugural address, Delft (Publ. J. B. Wolters, Groningen 1938).

[9] *On the geometrical representation of elementary physical objects and the relation between geometry and physics*, Nieuw Archief voor Wiskunde [3], *2* (1954), 73–89.

The Ideal Standard Clocks in the General Theory of Relativity

by C. Møller (Copenhagen)

According to basic assumptions in the general theory of relativity the rate of an ideal standard clock moving with the velocity v through a gravitational field with the scalar potential χ is given by the formula

$$d\tau = dt\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}\,, \qquad (1)$$

where τ is the proper time of the standard clock and t is the coordinate time in a *time-orthogonal* system of space-time coordinates. It is of some didactical interest to investigate the conditions which a real clock must satisfy in order to be an ideal clock in the sense of the formula (1). This question is also of a more practical interest in view of the fact that the construction of accurate time measuring instruments in recent years has made such progress that a direct verification of (1) with $v = 0$ by terrestrial experiments is in sight. The 'atomic clocks' constructed so far, in which atomic systems like ammonia molecules act as the balance of the clock, have already an accuracy of the order 3×10^{-10}, while the relative difference in rate, according to (1), of two clocks placed at rest at suitable places on the earth may be of the order 10^{-12}.

Since the oscillating system which contributes the essential part of the clock approximately may be treated as a harmonic oscillator, we shall first investigate the motion of a particle of proper mass $\mathring{m}_0$ which is elastically bound to a fixed point O in the gravitational field. The non-gravitationed force F is then of the form

$$F = -k\,s\,, \qquad (2)$$

where s is the distance of the particle from O and k is the elastic constant. The equations of motion of the particle may be written in the form of three-dimensional vector equations

$$\frac{d_c \boldsymbol{p}}{dt} = -m \operatorname{grad} \chi + \boldsymbol{F}, \tag{3}$$

where

$$m = \frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{4}$$

is the mass of the particle and

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{u} \tag{5}$$

is the momentum vector. $d_c \boldsymbol{p}/dt$ is the three-dimensionally covariant time derivative of the momentum. We have now to establish the conditions under which the time shown by this oscillator-clock is given by (1) with $v = 0$, i.e. by

$$d\tau = dt \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\,. \tag{6}$$

For a sufficiently small amplitude and for sufficiently small velocities in the oscillation, the mass in (3) may be treated as a constant

$$m_0 = \frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}}, \tag{7}$$

where χ here is the value of the potential at the point O. Further in the immediate surroundings of O the spatial geometry may be treated as Euclidean; therefore, if we also can neglect the gravitational force as compared with F, the equations (3) take the form of the usual oscillator equation

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -k\,x\,. \tag{8}$$

In this approximation the frequency of the oscillator is $\omega = \sqrt{k/m_0}$. From (7) and the transformation formula for the elastic constant [1]

$$k = \mathring{k} \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}} \tag{9}$$

we therefore get

$$\omega = \mathring{\omega} \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}, \tag{10}$$

where $\mathring{\omega} = \sqrt{\mathring{k}/\mathring{m}_0}$ is the frequency of the same oscillator when it is placed at rest in a system of inertia. Now ω is a measure of the rate of the oscillator-clock and therefore (6) is a consequence of (10).

Since F is of the order kA where A is the amplitude in the oscillation, the conditions for the exact equations (3) to reduce to the simple equation (8) are obviously

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{u^2}{c^2} \ll 1 & \text{a} \\ \frac{dm_0}{dt} u \ll kA & \text{b} \\ \frac{m_0 G}{kA} \ll 1 & \text{c} \\ KA^2 \ll 1 & \text{d} \end{array}\right\} \quad (11)$$

where $G = |-\text{grad}\,\chi|$ is the gravitational acceleration and K is the Riemann curvature constant for any 'plane' surface of three-dimensional geodesics through O. However, a closer consideration shows [1] that the first of these conditions, i.e. $u^2/c^2 \ll 1$ is not necessary for the validity of the formula (6) for the rate of the oscillator-clock.

Finally, if the centre O of the clock is moving with the velocity v and accelerated with the acceleration $\boldsymbol{a}$, a similar consideration shows that the formula (1) follows from the equations of motion (3) if the further condition

$$m_0 \frac{a}{kA} \ll 1 \qquad (12)$$

is satisfied. When the conditions (11c) and (12) are not well satisfied, an extra force $m_0(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{a})$ will appear on the right hand side of the equation of motion (8) causing in general a change in the frequency, i.e. in the rate which is not contained in the expression (1). Only if $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{G}$, as is the case for a freely falling clock, the two effects dealt with in (11c) and (12) will practically cancel.

For given G, K and a, it is always possible to choose the parameters of the clock, i.e. $\mathring{k}$, $\mathring{m}_0$, and A such that the conditions (11) and (12) are satisfied to any degree of accuracy. Thus it is always possible to construct clocks which are 'ideal' under given circumstances. On the other hand, the degree of accuracy to which a given clock (given $\mathring{k}$, $\mathring{m}_0$, A) may be regarded as ideal depends of course on the use we want to make of it (i.e. on G, K and a). It seems that the 'atomic clocks' constructed so far in this respect may be regarded as ideal to a very high degree of accuracy [1].

Diskussion – Discussion

V. FOCK: Since the formula $d\tau = \sqrt{1 + [2\chi - v^2]/c^2}\, dt$ is approximate it is perhaps useless to write the square root. (The gravitation potential contains 10 components and to express it by a single function is possible only in an approximate treatment or in some particular cases).

C. MØLLER: The formula is exact for arbitrarily large χ in any time-orthogonal system of space-time coördinates, where $g_{\iota 4} = \iota$, $\iota = 1, 2, 3$. Besides the scalar potential χ defined by $g_{44} = -(1 + 2\chi/c^2)$ the spatial metric tensor components $g_{\iota\varkappa}$ enter the formula through $v^2 = g_{\iota K}\, v^\iota\, v^K$. (Greek indices like ι and $\varkappa$ are running from 1 to 3.) In the most general system of coördinates, the exact formula [2] for $d\tau$ is.

$$d\tau = dt \sqrt{\left(\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}} - \gamma_\iota v^\iota\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}}$$

with $\gamma_\iota = g_{\iota 4}/\sqrt{-g_{44}}$ and $v^2 = \gamma_{\iota K}\, v^\iota\, v^K$, $\gamma_{\iota K} = g_{\iota K} + \gamma_\iota \gamma_K$.

W. H. MCCREA: In the standard derivation of the gravitational red-shift the radiation-source is implicitly assumed to be falling freely in the field; in this case the relativistic result must be exact. Can Prof. MØLLER's result be interpreted as showing that the result continues to hold to a good approximation if the source is *supported* in the gravitational field?

C. MØLLER: Yes, if the conditions (11) are statisfied.

References

[1] See, f. inst., C. MØLLER, *Old Problems in the General Theory of Relativity viewed from a New Angle.* Dan. Mat. Fys. Medd. vol. *30*, no. 10 *(1955)*.

[2] See, f. inst., C. MØLLER, *The Theory of Relativity*, Oxford *1952* (pp. 247 and 238).

Generalisations of Einstein's Theory of Gravitation Considered from the Point of View of Quantum Field Theory

by O. Klein (Stockholm)

The following considerations are based on the assumption that the principle of general relativistic invariance is neither limited to the macroscopic aspect, nor in contradiction with the fundamental principles of quantum theory, but is, on the contrary, to be regarded as an important guide in the search for an adequate formulation of quantum field theory. Against this assumption doubts have often been raised founded on the weakness of gravitational forces even at nuclear dimensions especially in connection with the view that quantum field theory needs some further deepgoing revision entailing the introduction of a fundamental length comparable in size with the cut-off distances in meson theories and thus not very much smaller than the range of nuclear forces. On the other hand it is well-known that the need of such revision is comparatively little urgent in quantum electrodynam icsbased on Dirac's relativistic wave equation for the spinor field and Maxwell's equations for the electromagnetic field, which also in many other respects is clearly the best founded part of quantum field theory. Already visible in Weisskopf's calculation of the electron self energy according to the Dirac equation [1], the divergence of which proved to be very much weaker than that corresponding to the scalar wave equation, this fact has been strongly emphasized through the success of the renormalisation procedure developed during later years. And it appears still more strikingly through the recent work by Pauli and Källén[1]) on the Lee model, suggesting according to Pauli a definite limit of this procedure necessitating a change of the theory at high energies and correspondingly small distances.

The principle of general relativity in combination with the quantum postulate is hardly sufficient, however, for the formulation of adequate field laws. In the first place we have here the principle of invariance

[1]) W. Pauli and G. Källén, [2]. I am indebted to professor Pauli and Dr. Källén for kindly letting me see their considerations before publication. Added in proofs: See also L. Landau [3], whose considerations (mentioned below by Pauli) I learnt about at the Bern meeting.

against so called gauge transformations closely connected with the conservation of electric charge. The importance of this invariance was strongly emphasized by WEYL [4] in the first attempt to extend the frame of gravitational relativity theory so as to comprise the electromagnetic phenomena. In the following we shall take as a starting point the fivedimensional representation of this principle, which, as far as it goes, has given a rather satisfactory solution to the problem posed by WEYL.

The main problem to be solved by a generalised quantum field theory is, however, the adequate formulation of the laws governing nuclear and mesonic phenomena. Here YUKAWA's idea of the connection between nuclear forces and charged and neutral BOSE-EINSTEIN particles with restmass corresponding to the range of the forces has been leading in the great amount of work done to bring order into this new part of physics. And as a further guide the assumption of the charge independence of these phenomena — neglecting electromagnetic forces — first introduced by KEMMER has played an important rôle. In the search for a more rigid basis for the description of these phenomena it seems natural to fix the attention on the appearance of BOSE-EINSTEIN fields with electrically charged quanta as being the essentially new feature of YUKAWA's theory as compared with the EINSTEIN-MAXWELL theory of gravitational and electromagnetic fields. In fact, the appearance of finite restmasses does not in itself demand any new principle of invariance, exhibiting rather the lack of that kind of gauge invariance, which forbids a finite photon restmass.

Now the fivedimensional theory, mentioned above, seemed to demand a generalisation including such charged fields. In order to account for the existence of an elementary electric charge one had hereby to assume a periodic dependence of the field quantities on the extra coordinate x^0, conjugated to the electric charge, the period corresponding to a small length $\sqrt{2\varkappa}\, h\, c/e \approx 0{\cdot}8 \times 10^{-30}$ cm, where $\varkappa$ $(= 8\pi\gamma/c^4)$ is the EINSTEIN gravitational constant, h PLANCK's quantum of action, c the vacuum velocity of light and e the elementary electric charge.

Now, such a theory, although in a certain sense the most direct generalisation of relativity theory including gauge invariance and charge conservation so as to comprise electrically charged fields, has such strange features that it should hardly be taken litteraly. In the same direction points the similarity of the periodicity condition to a quantum condition in classical disguise. We shall see, however, how the fivedimensional relativity theory with the periodicity assumption may be used as a model or stepping stone towards a theory of more physical aspect, whereby charge invariance appears as part of a natural generalisation of gauge invariance. But in order to have a background on which to consider the somewhat repellent appearance of the small length just mentioned in the generalised

quantum field theory we shall first return to the question touched upon above of the natural, unit length. For this purpose we shall regard the quantum field theory built on EINSTEIN's gravitational theory and DIRACS theory of the electron, but so far only in a general way without entering on the specific difficulties of the quantisation problem.

Let us use the Lagrangian formalism of quantum theory developed by FEYNMAN and SCHWINGER according to which e^{iS}, with $S = \int L\, d^4 x/\hbar c$ (L is the Lagrangian density of the system, the integral is to be taken over the space-time region separating two space-like hypersurfaces and the time coordinate x^4 is taken as $c\,t$), is connected to the transformation matrix relating expectations at one of the hypersurfaces with those at the other hypersurface. Let now L signify the Lagrangian density of a system of spinor particles in a gravitational field. Then the total FEYNMAN-SCHWINGER integral of the spinor field and the gravitational field is

$$S = \frac{1}{\hbar c} \int \left(L + \frac{1}{2\varkappa} G\right) d^4x \tag{1}$$

where G is the wellknown Lagrangian density of the pure gravitational field, of which we shall for the present only use the property that, with coordinates

$$x^k = 1_0\, \xi^k, \quad k = 1, 2, 3, 4\,, \tag{2}$$

where 1_0 is a (so far arbitrary) unit length and the ξ^k dimensionless parameters, it is a function G_0 divided by 1_0^2 of the dimensionless EINSTEIN g_{ik} and their derivatives with respect to the ξ^k. Introducing the parameters ξ^k into the Lagrangian density of the spinor particles and replacing the spinor wave function ψ by $\varphi = 1_0^{3/2}\,\psi$, which is again dimensionless, we have

$$L = \frac{\hbar c}{1_0^4} L_0\,, \qquad G = \frac{1}{1_0^2} G_0. \tag{3}$$

where L_0 is obtained from L by replacing the x^k by the ξ^k, the ψ by φ and $\hbar$ and c by unity, L_0 being thus dimensionless. Then we get

$$S = \int d^4\xi \left(L_0 + \frac{1_0^2}{2\varkappa\hbar c} G_0\right), \tag{4}$$

from which equation we see that the quantum field theory of the combined spinor and gravitational field will take a particularly simple form, if for the unit length 1_0 we choose the expression

$$1_0 = \sqrt{2\varkappa\hbar c} = \sqrt{\frac{8\gamma\hbar}{c^3}} \approx 1.1 \times 10^{-32}\,\text{cm}\,, \tag{5}$$

γ being the ordinary gravitational constant. We shall compare the length l_0 with the period characteristic of the fivedimensional theory mentioned above

$$l = \frac{\sqrt{2\varkappa}\,\hbar c}{e} \qquad (6)$$

It follows

$$l = 2\pi \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}}\; l_0 \qquad (7)$$

Now l_0 is the outcome of the ordinary quantisation of gravitational theory, while l comes from the fivedimensional, quasigeometrical interpretation of the elementary quantum of electricity, which we regard as a quantisation in disguise. To have these two processes of quantisation connected is thus the same as to determine the value of $\hbar c/e^2$. A near lying possibility of such a connection is that the relation between l and l_0 is determined by the renormalisation of the electric charge through vacuum polarisation, which in an adequate theory ought to be finite. If thus the basic equations instead of e would contain a quantity e_0 simply connected to $\sqrt{\hbar c}$ (say $\sqrt{\hbar c}$) their form would become very simple, if l_0 is chosen as the unit of length.

Before leaving the question of l_0 we shall regard this quantity from a more elementary point of view [5]. Let us assume that we have to do with a particle described approximately as a quantum belonging to a linear wave equation. Then by superposition we may make a wave package representing the particle confined to a volume of linear dimensions λ. If λ is small compared to the COMPTON wavelength of the particle the wave package will represent an energy $\sim h c/\lambda$ and thus a mass $\sim h/c\,\lambda$. Thus the difference in gravitational potential between the centre and the edge of the wave package will be $\sim \gamma\, h/c\,\lambda^2$ and will mean a negligible change of the metrics only if $\gamma h/c\lambda^2 \ll c^2$, i. e. if $\lambda \gg \sqrt{\gamma\, h/c^3} \sim l_0$. From this consideration it would seem to follow that the linear wave equation for the particle in question would break down when the wave length approaches the length l_0. The condition in question can also be expressed by stating that for λ approaching the length l_0 the gravitational self energy of the particle approaches the kinetic energy corresponding to its volume. It is perhaps not unreasonable to expect that the rigorous consideration of gravitational and perhaps other similar non-linear effects would do away with the remaining divergencies of electron theory. In this connection it is interesting that PAULI's estimate[1]) of the energies of the 'ghost'

[1]) Kindly communicated to me in a letter.

states, those states where the unphysical, indefinite metrics of renormalized electron theory makes itself felt, is of the order of magnitude $\hbar c/l_0$.[1])

The five dimensional representation of the connection between gravitation and electromagnetism is based on the gauge transformation of the electromagnetic potentials

$$A_k' = A_k + \frac{\partial f}{\partial x^k}, \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{8}$$

and the corresponding transformation of the wave function ψ of an elecrtic particle of charge q

$$\psi' = \psi\, e^{\frac{iq}{\hbar c} f}, \tag{9}$$

where f is an arbitrary function of the space-time coordinates. The essential idea of the five-dimensional representation is now to regard the electric charge (multiplied by a suitable, constant factor to give it the dimension of a momentum) as a fifth component p_0 of the momentum-energy vector and to introduce a parameter x^0 (of the dimension of a length) as its canonically conjugate. Thus a wave function φ of an electric particle of charge q will be written

$$\varphi(x^0, x) = \psi(x)\, e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x^0}, \tag{10}$$

where x is shorthand for the four space-time coordinates. With

$$p_0 = \frac{q}{\beta c}, \qquad f_0(x) = -\beta f(x), \tag{11}$$

where β is a constant of the dimension of a reciprocal potential, the transformation

$$x^{0\prime} = x^0 + f_0(x) \tag{12}$$

is seen to leave the fivedimensional wave function $\varphi(x^0, x)$ invariant. Thus we have a simple representation of the phase part of the gauge transformation, which is analogous to the shift of the origin of the space-time coordinates

$$x^{k'} = x^k + f_k(x), \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{13}$$

so closely connected with the conservation of momentum and energy.

While the introduction of the gravitational field in the general theory of relativity could be based on the metric invariant (the square of the fourdimensional line element) of special relativity theory a generalised field theory should not be based on some extended line element, the physical significance of which would be rather obscure. In stead of this we

[1]) see also L. Landau [3], where a similar estimate is made, an its connection with $\frac{\hbar c}{l_0}$ is pointed out.

have, as has often been remarked to chose some fundamental, physical law, the invariance of which under an extended transformation group is plausible. It would seem that the natural choice to make is the DIRAC equation, the generally relativistic form of which has long been known thanks to the work of FOCK, SCHRÖDINGER, BARGMANN and others[1]).

Thus we consider five matrix functions γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) of the coordinates (in the restricted theory of the space-time coordinates alone), which in general coordinate transformations are supposed to behave as the contravariant components of a five-vector. Then the DIRAC equation will take the form

$$\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu\right) \psi + \frac{m c}{\hbar} \psi = 0 . \tag{14}$$

Here the Γ_μ are another set of matrices, which are known to appear in the theory in order to make it invariant with respect to linear transformations of the ψ-components, the coefficients of which may be functions of the coordinates. The γ^μ are supposed to fulfil the following commutation relations

$$[\gamma^\lambda, \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}] = 0 , \qquad \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4 , \tag{15}$$

where as usual $[a, b]$ and $\{a, b\}$ denote the expressions $a\,b - b\,a$ and $a\,b + b\,a$ respectively. Denoting the symmetric quantities $\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$, which transform as a tensor, by $\gamma_{\mu\nu}$ we may define the corresponding covariant tensor components by means of

$$\gamma_{\mu\varrho}\, \gamma^{\varrho\nu} = \delta_\mu^\nu , \tag{16}$$

δ_μ^ν being KRONECKER symbols, and the quantities

$$\gamma_\mu = \gamma_{\mu\varrho}\, \gamma^\varrho , \tag{17}$$

from which follows

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}, \quad \delta_\mu^\nu = \frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma^\nu\} . \tag{18}$$

As well known, each of the matrices Γ_μ can (apart from an arbitrary term proportional to the unit matrix) be simply expressed in terms of the γ^μ, γ_μ and their first derivatives with respect to the coordinates. In order to have a complete, generalised quantum field theory based on the equation (14) we may try to define the Lagrangian density of the γ^μ field by means of a procedure connected with the DIRAC equation in question, which leads to the correct result in the purely gravitational case. For this purpose we consider the process of parallel displacement of a spinor ψ first introduced by FOCK [6] and defined by means of the covariant derivatives

[1]) In connection with projective relativity theory it was early used by VEBLEN, PAULI and others.

$$\Delta_\mu \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu\right)\psi, \tag{19}$$

which in a linear transformation of the spinor components behave like spinors. Now, the parallel displacement of a spinor is in general non-integrable, the commutators $[\Delta_\mu, \Delta_\nu]$ being linear, homogeneous expressions in the components of the curvature tensor of the RIEMANN space, whose metric tensor is given by the $\gamma_{\mu\nu}$. Through this process the curvature tensor and the corresponding invariant, playing the rôle of Lagrangian density in the EINSTEIN theory of gravitation, may thus be defined by means of processes and quantities directly connected with the DIRAC equation without any recurrence to 'geometry'.

Now, the wellknown result [7] of the restricted, fivedimensional theory is that the Lagrangian obtained in this way corresponds exactly to the EINSTEIN-MAXWELL theory of gravitation and electromagnetism, if the following restrictions are made a) the $\gamma_{\mu\nu}$ depend only on the four space-time coordinates b) γ_{00} is constant — restrictions compatible with the transformations (12) and (13) — and if the following connections are made between the $\gamma_{\mu\nu}$ and the g_{ik} and A_i of the ordinary theory

$$\gamma_{i0} = \gamma_{00}\, \beta\, A_i, \quad \gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_{00}\, \beta^2 A_i A_k, \tag{20}$$

and if, further, the constant β is determined by the relation

$$\varkappa = \frac{1}{2}\, \gamma_{00}\, \beta^2.$$

The restriction of γ_{00} to be constant is certainly not natural and has been the subject of much discussion [5]. The most obvious assumption to make is to leave out this restriction altogether and let γ_{00} be determined by the fifteenth field equation then obtained from the variational principle. In the absence of 'matter' (here the spinor particles) this can easily be carried through and leads to a variation of γ_{00} in the presence of electromagnetic fields, which, however, is extremely weak and probably far outside the reach of experimental investigation. In the presence of matter the corresponding part of the generalised energy-momentum tensor is still uncertain being tied up with the problem of the masses of elementary particles. To me it seems plausible that the solution of this problem, which certainly needs further generalisation of the field theory, would lead to a negligible, average variation of γ_{00} also in the presence of matter, although its variation within regions of the dimension l_0 may be important for the problem just mentioned. Outside of matter and when the variation of γ_{00} may be neglected we may put $\gamma_{00} = 1$ so as to obtain the same scale for x^0 as for the other coordinates in an ordinary coordinate

system, where gravitation may be neglected. Then in stead of the above relation we may write

$$\beta = \sqrt{2\varkappa}\,, \tag{21}$$

which I think ought to be regarded as a relation between two constants, from which follows the validity of the ordinary laws, as soon as the deviations from the restrictions a) and b) may be neglected.

Coming now to the generalisation of the theory we shall still restrict ourselves as far as possible. Thus we shall leave the transformation (13) of the space-time coordinates unchanged, just extending the transformation (12) to

$$x^{0\prime} = x^0 + f_0(x^0, x)\,, \tag{22}$$

where f_0 is supposed to be a periodic function of x^0. Using 1_0 as unit of length we shall assume the period to be 2π, which with $\gamma_{00} \to 1$ in free space contains a physical assumption perhaps to be changed at a later stage. At present it is made for reasons of simplicity. Since according to (13) the γ^k, $k = 1, 2, 3, 4$, transform among themselves we may assume that they are functions of the space-time coordinates alone, while γ^0 will have to contain x^0 as well. Of ψ we shall also assume that it is a periodic function of x^0 corresponding to a superposition of states belonging to particles of charge $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ quanta of electricity. This is equivalent to its expansion according to the set of eigenfunctions

$$U_n(x^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{inx^0}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,, \tag{23}$$

thus

$$\psi(x^0, x) = \sum_n \psi_n(x)\, U_n(x^0)\,. \tag{24}$$

Let now $F(x, x^0)$ be any field function, e.g. γ^0, depending on x^0 as well as on x. Then the introduction of the expansion (24) into the wave equation (14) will lead to a system of wave equations for the $\psi_n(x)$ no longer containing x^0, in which matrices of the kind

$$(n' \mid F(x^0, x) \mid n'') = F_{n'-n''}(x) \tag{25}$$

will appear, $F_n(x)$ being the Fourier coefficients of the expansion

$$F(x^0, x) = \sum_n F_n(x)\, e^{inx^0}\,. \tag{26}$$

On the other hand for p_0 itself we obtain the following matrix representation

$$(n' \mid p_0 \mid n'') = n'\, \delta_{n'n''} \tag{27}$$

in conformity with the above statement about the charge belonging to the states U_n.

We shall now find also the matrix representation of the generalised gauge transformation (22), whereby we may limit ourselves to the infinitesimal transformation

$$x^{0\prime} = x^0 + \varepsilon \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \xi_s(x)\, e^{i s x^0}, \tag{28}$$

ε being an infinitesimal, constant parameter. Now, to a function $U_n(x^0)$ corresponds a function $\overline{U}_n(x^{0\prime})$ given by

$$\overline{U}_n(x^{0\prime}) = U_n(x^0) \left| \frac{dx^0}{dx^{0\prime}} \right|^{\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

where x^0 has to be expressed in terms of $x^{0\prime}$ by means of (28). The $\overline{U}_n(x^{0\prime})$ form again a complete, orthogonal and normalized set of eigenfunctions for the same set of states as the $U_n(x^0)$, every state corresponding to a particle of given charge from the x^0-standpoint. From the $x^{0\prime}$-standpoint such a state is, however, a mixture of states of given charge represented by the functions $U_n(x^{0\prime})$, and we may easily find the expansion of $\overline{U}_n(x^{0\prime})$ in terms of the $U_n(x^{0\prime})$ set, the result being

$$\overline{U}_n(x^{0\prime}) = U_n(x^{0\prime}) - i\,\varepsilon \sum_{n'} \frac{n+n'}{2}\, \xi_{n'-n}\, U_{n'}(x^{0\prime})\,. \tag{30}$$

Now, the state defined by the wave function $\psi(x^0, x)$ of (24) may just as well be represented by a wave function $\overline{\psi}(x^{0\prime}, x)$ given by

$$\overline{\psi}(x^{0\prime}, x) = \sum_n \psi_n(x)\, \overline{U}_n(x^{0\prime})\,, \tag{24a}$$

where the coefficients are the same as in (24). On the other hand we may expand $\overline{\psi}$ in terms of the functions $U_n(x^{0\prime})$

$$\overline{\psi}(x^{0\prime}, x) = \sum_n \psi_n'\, U_n(x^{0\prime})\,. \tag{31}$$

Comparing (31) with (24a) and (30) we get

$$\psi_n'(x) = \sum_{n'} \left(\delta_{nn'} + \varepsilon \sum_{n'} (n\,Q\,n')\right) \psi_{n'}(x) \tag{32}$$

with

$$(n' \mid Q \mid n') = -i\,\frac{n'+n''}{2}\, \xi_{n'-n''}\,. \tag{33}$$

If, as we shall assume, the transformation (28) is real we have

$$\xi_s(x) = \xi^*_{-s}(x) , \tag{34}$$

from which follows that $1 + \varepsilon Q$ is a unitary matrix.

Remembering that what we need is a quantum theory comprising charged fields, in which the elementary quantum of electricity has found its adequate place the theory just outlined with its states of multiple charge looks too complicated. It is therefore a hopeful feature that it may be very much simplified without loosing its consistency and essential properties. Thus we can take any number N of consecutive integers to be the eigenvalues of p_0 and cut out the corresponding part of any matrix $(n' \mid F \mid n'')$ simply by putting all the ψ_n equal to zero, which do not belong to the eigenvalues of p_0. Thus already the case of two row matrices with

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

will give a mathematically possible theory. This case will correspond to spinor particles of positive and negative, unit charge and of zero charge, the negative particles being antiparticles of the positive ones.

The obvious resemblance of this theory to the symmetric meson theory is strengthened when we regard the corresponding Q-matrix, which is seen to be

$$Q = -i \begin{pmatrix} \xi_0 \,, & \dfrac{\xi_1}{2} \\ \dfrac{\xi_1^*}{2}, & 0 \end{pmatrix} . \tag{36}$$

If for a moment we disregard the dependence of the ξ's on the coordinates and their consequent lack of commutability with the momenta nothing is changed, when to Q in (36) we add the following multiple of the unit matrix

$$i \frac{\xi_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

In this way we get a new matrix $\overline{Q}$ given by

$$\overline{Q} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \xi_0, & \xi_1 \\ \xi_1^*, & -\xi_0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

or, if we introduce the isotopic spin matrices

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\overline{Q} = -\frac{i}{2} \left(\frac{\xi_1 + \xi_1^*}{2} \tau_1 + i \frac{\xi_1 - \xi_1^*}{2} \tau_2 + \xi_0 \tau_3 \right) . \tag{39}$$

But this matrix represents an arbitrary, infinitesimal, real rotation in isotopic spin space, defining just that transformation group, which is characteristic of the symmetric meson theory.

Now, the difference between Q and $\overline{Q}$ is probably what should be expected from the neglect of electromagnetic forces in the latter theory. Thus putting $\xi_1 = 0$ and taking the dependence of ξ_1 on x into account Q will just correspond to the gauge transformation of electromagnetism, while $\overline{Q}$ will also change the phases of the ψ-components belonging to neutral particles.

Let us for a moment return to the general case. Here the field is represented by the F-matrices. We may say that $(n' \mid F \mid n'')$ represents the field connected with a transition of the spinor particle from a n'-fold to a n''-fold unit charge corresponding to quanta of $(n' - n'')$-fold unit charge. Thus the diagonal represents neutral fields, while the lines parallel to the diagonal represent fields of charged quanta of higher and higher multiplicity the farther away from the diagonal they are situated. The interpretation just outlined is seen to correspond closely to the commutation relation

$$(n' \mid [p_0, F] \mid n'') = (n' - n'')\,(n' \mid F \mid n'')\,. \tag{40}$$

In the case of two row matrices the field is seen to correspond to neutral and to positive and negative quanta of unit charge.

As to the further development of the theory outlined it would probably need much work before any quantitative conclusions, comparable with nuclear and mesonic experiments, could be drawn from it, this being due to its pronounced non-linearity. On the other hand, the non-linearity would seem to justify the hope that the wellknown difficulty of five-dimensional relativity, the appearance of enormous particle mass terms, may be overcome in the way touched upon above, whereby the quantity corresponding to γ_{00} may perhaps be of importance. On the whole, the relation of the theory to the fivedimensional representation of gravitation and electromagnetism on the one hand and to symmetric meson theory on the other hand — through the appearance of the charge invariance group — may perhaps justify the confidence in its essential soundness.

Diskussion – Discussion

W. Pauli: The existence of a finite cut-off momentum in quantized field theories as a boundary of its mathematical consistency was proved by G. Källén and myself [2] only for a particular academic model. In analogy to this I formulated in private communications the conjecture of a finite energy range of consistency in quantum electrodynamics with a cut-off momentum P given by

$$\log \frac{P^2}{m^2 c^2} \sim \frac{1}{\alpha} \sim 137 \tag{1}$$

Here m is the restmass of the electron, c the velocity of light and $\alpha = e^2/\hbar c$ the fine-structure constant.

Independently LANDAU [3] and his collaborators obtained the same order of magnitude, as given by (1), for the maximum cut-off momentum P in quantum electrodynamics by a detailed mathematical analysis of the series which expresses the physical electric charge e in powers of the mathematical charge e_0. Unfortunately the passage from the asymptotic behaviour for large P of the single terms of this power series to the asymptotic behaviour of its sum needs additional mathematical assumptions of uniformity which have not yet been proved rigorously. Nevertheless the still hypothetical cut-off moment in quantum electrodynamics, given by (1), is rather suggestive. For us here it is important that LANDAU pointed to the fact that for a momentum P of this high order of magnitude the gravitational forces between two electrons are becoming of the same magnitude as the Coulomb forces. The relation $\varkappa P^2 \sim 1$ in units $\hbar = c = 1$, which LANDAU derives in this way[1]), gives in KLEIN's notation just the relation mentioned by him

$$P \sim \frac{\hbar}{l_0} \tag{2}$$

with $l_0 = \sqrt{\varkappa \hbar c}$, where $\varkappa$ is EINSTEIN's gravitational constant.

The question whether such a very high limit of mathematical consistency for quantum electrodynamics can have any direct physical meaning at all has been much disputed at the Physics Conference in Pisa in June. In view of the possibility of the occurence of mesons or nucleons in intermediate states the view has been stated, that the limit of the physical validity of quantum electrodynamics will be reached already at energies about corresponding to the mass of the nucleons.

On the other hand, the connection (2) of the mathematical limitation of quantum electrodynamics with gravitation, pointed out by LANDAU and KLEIN, seems to me to hint at the indeterminacy in space-time of the light-cone, which is governed by probability-laws in a quantized field theory, invariant with respect to the wider group of general relativity. It is possible that this new situation so different from quantized theories, invariant with respect to the LORENTZ group only, may help to overcome the divergence difficulties which are so intimately connected with a c-number equation for the light-cone in the latter theories.

[1]) The argument is not accurate enough to distinguish between 1 and α on the right side of (2).

W. Heitler: Landau's (very high) cut-off represents an upper limit imposed such that quantum electrodynamics should be selfconsistent and not lead to the catastrophes (negative probabilities, etc.) otherwise occuring as a result of charge renormalization. But it may be that the true cut-off lies considerably lower. There are strong arguments for the assumption that the cut-off momentum should lie at the order of magnitude of the proton mass. It is very probable that our present meson theory requires some fundamental physical changes and that not even the theory of the nucleon is in order. Quantum electrodynamics is not independent of all the other particles (mesons and nucleons, etc.). Not even the electrodynamics of π-mesons is free of fundamental difficulties (meson-meson scattering) and there can be little doubt that quantum electrodynamics can only be regarded as correct so long as these particles do not enter in virtual processes. It seems therefore plausible to assume that something goes wrong for virtual momenta not higher than the order of the nucleon mass. On the other hand one can verify that, by introducing such a cut-off, none of the established results of quantum electrodynamics (line shift, magnetic moment, collision cross sections) are changed appreciably, i.e. the changes are beyond the accuracy with which these effects are established.

A. Lichnerowicz: Si j'ai bien compris, la signature de la métrique pentadimensionelle introduite est $+----$. J'en suis fort heureux, car l'autre signature parfois introduite: $++---$ conduit, en ce qui concerne les équations du champ, à des problèmes un peu tératologiques.

B. Jouvet: Au sujet de la relation entre la constante de structure fine $e^2/\hbar c$ et la constante de coupure, je voudrais faire la remarque suivante: La construction des particules élémentaires à partir de Fermions plus élémentaires couplés par des couplages de Fermi conduit à exprimer les constantes de couplages des Bosons avec les paires de Fermions en fonction des constantes de coupure des impulsions des Fermions élémentaires. Dans le cas du photon, on obtient le résultat indiqué par le Prof. Pauli, équation (1). De plus cette théorie prévoit l'existence d'une particule de spin 2, qu'on peut interpréter comme étant le graviton. La constante de gravitation que l'on peut alors calculer est une fonction de la constante de coupure et de la constante de Fermi. Inversement, on peut espérer exprimer les constantes de coupure, en fonction de la constante de gravitation.

O. Costa de Beauregard: La nécessité logique d'une synthèse entre la théorie des Quanta et la Relativité générale ressort d'un très bel argument relatif à la 4ème relation d'incertitude, élucidé par Bohr et par Einstein au cours de leurs âpres discussions. La loi d'équivalence entre énergie et masse inerte de la Relativité restreinte semble d'abord mettre en défaut la 4ème relation d'incertitude: l'on peut peser la boite

munie d'un volet mobile d'où s'échappe une particule quantique avant l'ouverture et après la fermeture du volet. Mais il faut examiner *comment* seront faites les pesées au moyen d'une balance. Il apparait alors que la $4^{\text{ème}}$ relation d'incertitude est rétablie *exactement*, dès qu'on évoque la loi einsteinienne de variation de l'étalon du temps dans la direction de l'accélération de la pesanteur. Tout l'argument est très proche parent de l'argument d'équivalence entre inertie et gravitation par lequel EINSTEIN établit initialement l'effet DOPPLER de gravitation; il se situe dans le même cadre pré-riemannien que lui. Par là se manifeste l'intimité profonde de la mécanique ondulatoire et de l'optique.

H. BONDI: There is a connection between gravitation and electromagnetism additional to those discussed already.

NEWTON'S achievement can be described as establishing the sun, a *visible* body as causing the planetary motions. His theory therefore links two observations, one dynamical and one electromagnetic. Special relativity preserves this link under transformations.

In general relativity the SCHWARZSCHILD singularity raises a difficulty for if a body of mass m were to have a radius less than $2m$ then such a body would be invisible but would still be observable through its gravitational field. This intolerable possibility has been ruled out on the basis of the properties of materials by considerations due to EDDINGTON and to CURTIS. Would not a more fundamental denial of this possibility be a result of any satisfactory unitary theory?

O. KLEIN: I fear that I have missed Professor BONDI's point. Thus the observability of a given star by a given observer by means of light rays is no invariant and may be arbitrarily poor, e.g. if the observer moves away from the star with sufficient velocity. Further the difficulty of the singularity of the SCHWARZSCHILD solution has, as far as I can see, no more to do with electromagnetism than with particle dynamics, any kind of particle requiring an infinite time to come out from the interior of the star as judged by the outside observer.

References

[1] WEISSKOPF, V., Phys. Rev. *56*, 72 (1939).
[2] KÄLLÉN, G., und PAULI, W., Festskrift til Niels Bohr, Det Kgl. Danske Vid. Selsk. *30*, Nr. 7 (1955).
[3] LANDAU, L., in Niels Bohr and the development of physics, London 1955.
[4] WEYL, H., Berl. Ber. 1918, p. 465.
[5] KLEIN, O., Kosmos (Svenska Fysikersamfundet), *32*, 33 (1954).
[6] FOCK, V., Zs. f. Phys. *57*, 261 (1929).
[7] KLEIN, O., Zs. f. Phys. *37*, 895 (1926).

Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique

par O. COSTA DE BEAUREGARD (Paris)

1. Particule libre de spin non spécifié

Avec MARCEL RIESZ [1] on considère les solutions de l'équation de GORDON ($\lambda, \mu, \nu, \varrho = 1, 2, 3, 4$; $x_4 = i\,c\,t$)

$$(\partial_\lambda^\lambda - k_0^2)\,\psi(x) = 0\,, \tag{1}$$

et l'on montre que, $\eta(k) = 0$ désignant l'hyperboloïde

$$k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0\,, \tag{2}$$

$d\eta_\lambda$ son quadrivecteur élément de volume (colinéaire à k_λ) et $d\eta$ le module de celui-ci, tel que

$$k_\lambda\, d\eta = -\,k_0\, d\eta_\lambda\,, \tag{3}$$

$\varepsilon(k)$ une fonction valant respectivement ± 1 sur les nappes des fréquences positives et négatives (pour abréger, l'on se limite aux transformations de LORENTZ orthochrones), la décomposition de FOURIER du $\psi(x)$ peut s'écrire

$$\psi(x) = (2\,\pi)^{-3/2} \iiint\limits_{\eta} e^{i k_\lambda x^\lambda}\, \zeta(k)\, \varepsilon(k)\, d\eta\,. \tag{4}$$

Soit alors $\sigma(x) = 0$ une hypersurface quelconque du genre espace, $d\sigma_\lambda$ son quadrivecteur élément de volume, et

$$[\partial^\lambda] \equiv \underset{\rightarrow}{\partial^\lambda} - \underset{\leftarrow}{\partial^\lambda} \tag{5}$$

l'opérateur du courant de GORDON: on montre que l'intégrale

$$\zeta(k) = -\,\frac{i}{2\,k_0}\,(2\,\pi)^{-3/2} \iiint\limits_{\sigma} e^{-i k_\lambda x^\lambda}\,[\partial^\mu]\,\psi(x)\, d\sigma_\mu \tag{6}$$

est indépendante de σ, et qu'elle est la réciproque au sens de FOURIER de (4).

ψ^* et ζ^* désignant les conjugués de ψ et ζ, et p et q numérotant deux solutions différentes de l'équation de GORDON, l'égalité de PARSEVAL covariante (au premier membre indépendant de σ) s'écrit

$$-\frac{i}{2\,k_0}\iiint_\sigma \psi_p^* \, [\partial^\lambda] \, \psi_q \, d\sigma_\lambda = \iiint_\eta \zeta_p^* \, \zeta_q \, \varepsilon(k) \, d\eta \,. \tag{7}$$

Définitions covariantes du produit scalaire hermitien de deux ψ ou ζ (fonctions de 4 variables liées par (1)):

$$\langle \psi_p \,|\, \psi_q \rangle_\sigma = \langle \psi_q \,|\, \psi_p \rangle_\sigma^* = -\frac{i}{2\,k_0}\iiint_\sigma \psi_p^* \, [\partial^\lambda] \, \psi_q \, d\sigma_\lambda \,, \tag{8}$$

$$\langle \zeta_p \,|\, \zeta_q \rangle_\eta = \langle \zeta_q \,|\, \zeta_p \rangle_\eta^* = \iiint_\eta \zeta_p^* \, \xi_q \, \varepsilon(k) \, d\eta \,. \tag{9}$$

Posons encore

$$e(kx) = e^*(-\,kx) = \begin{cases} (2\pi)^{-3/2}\, e^{i k_\lambda x^\lambda} & si \; k_\lambda \, k^\lambda + k_0^2 = 0 \,, \\ 0 & si \quad ,, \quad \neq 0 \,. \end{cases} \tag{10}$$

(4), (6), (7) se récrivent

$$\psi(x) = \langle e(-\,kx) \,|\, \zeta(k) \rangle_\eta \,, \tag{11}$$

$$\zeta(k) = \langle e(kx) \,|\, \psi(x) \rangle_\sigma \,, \tag{12}$$

$$\langle \psi_p \,|\, \psi_q \rangle_\sigma = \langle \zeta_p \,|\, \zeta_q \rangle_\eta \,. \tag{13}$$

La norme (nombre d'occupation) d'un ψ ou ζ, l'orthogonalité de deux ψ ou ζ, se définissent comme d'habitude à partir de (13).

Introduisons le propagateur de JORDAN-PAULI

$$D\,(x - x') = (2\pi)^{-3} \iiint_\eta e^{i k_\lambda (x-x')^\lambda} \, \varepsilon(k) \, d\eta \,; \tag{14}$$

on a

$$D\,(x'' - x') = \langle e(-\,kx') \,|\, e(-\,kx'') \rangle_\eta = \langle D\,(x - x') \,|\, D\,(x - x'') \rangle_\sigma \,, \tag{15}$$

ce qui montre en particulier que deux fonctions de x, $D(x - x')$ et $D(x - x'')$, sont orthogonales si $x'' - x'$ est du genre espace. Substituant (6) dans (4) il vient la formule de SCHWINGER résolvant le problème de CAUCHY

$$\psi(x) = \langle D\,(x' - x) \,|\, \psi(x') \rangle_{\sigma'} \,. \tag{16}$$

Formules analogues dans le 4-espace k:

$$D(k', k'') = \langle e(k' x) \mid e(k'' x) \rangle_\sigma = \langle D(k, k') \mid D(k, k'') \rangle_\eta , \tag{17}$$

$$\zeta(k) = \langle D(k, k') \mid \zeta(k') \rangle_\eta . \tag{18}$$

(4) et (18) donnent le développement d'une solution de (1) sur les ondes planes; les coefficients sont donnés par (6) et la réciproque de (18); la fonction de distribution correspondante est le second membre de (13) avec $p = q$. (6) et (16) donnent le développement d'une solution de (1) sur les ondes $D\,(x - x')$ attachées à une σ'; les coefficients sont donnés par (4) et la réciproque de (16); la fonction de distribution correspondante est le premier membre de (13) avec $p = q$ et $\sigma = \sigma'$. Les ondes $D\,(x - x')$ sont complémentaires au sens de Bohr des ondes planes; elles expriment une localisation exacte du corpuscule traversant l'hypersurface σ', toutes ses localisations passées et futures étant contenues dans le cône isotrope de sommet x'.

L'ensemble de ces formules se situe dans le prolongement direct de la célèbre chèse de 1924 de M. L. de Broglie. Elles représentent l'essentiel de la «mécanique ondulatoire».

2. Particule libre à spin

Les équations d'onde sont de la forme ($\bar{\psi} = \psi^+ \beta$)

$$(a_\lambda \overrightarrow{\partial^\lambda} + k_0)\, \psi(x) = 0 , \qquad \bar{\psi}(x)\, (a_\lambda \overleftarrow{\partial^\lambda} - k_0) = 0 , \tag{19}$$

ou

$$(a_\lambda k^\lambda - i\, k_0)\, \zeta(k) = 0 , \qquad \bar{\zeta}(k)\, (a_\lambda k^\lambda - i\, k_0) = 0 ; \tag{20}$$

quelle que soit l'algèbre des a_λ, elles entrainent (1) et (2). On montre que (8), (9), (7) se récrivent

$$\langle \psi_p \mid \psi_q \rangle_\sigma = \langle \psi_q \mid \psi_p \rangle_\sigma^* = i \iiint_\sigma \bar{\psi}_p\, a^\lambda\, \psi_q\, d\sigma_\lambda , \tag{21}$$

$$\langle \zeta_p \mid \zeta_q \rangle_\eta = \langle \zeta_q \mid \zeta_p \rangle_\eta^* = i \iiint_\eta \bar{\zeta}_p\, a^\lambda\, \zeta_q\, \varepsilon(k)\, d\eta_\lambda , \tag{22}$$

$$i \iiint_\sigma \bar{\psi}_p\, a^\lambda\, \psi_q\, d\sigma_\lambda = i \iiint_\eta \bar{\zeta}_p\, a^\lambda\, \zeta_q\, \varepsilon(k)\, d\eta_\lambda . \tag{23}$$

Symboliquement (car $e(kx)$ n'est pas solution de (20)) l'on a

$$\psi(x) = \langle\langle\, e(-k\,x) \mid \zeta(k) \,\rangle\rangle_\eta, \tag{24}$$

la formule réciproque étant

$$\zeta(k) = -\frac{(2\,\pi)^{-3/2}}{2\,k_0} \iiint\limits_\sigma e^{-i k_\lambda x^\lambda} \left(k^\mu - [a^\mu\, a^\nu - a^\nu\, a^\mu]\, k_\nu + i\, k_0\, a^\mu\right) \psi(x)\, d\sigma_\mu\,; \tag{25}$$

dans le cas de l'électron de Dirac, ceci se simplifie sous la forme (implicitement) donnée par Schwinger

$$\zeta_{(1/2)}(k) = \left\langle \frac{i}{2\,k_0} (\gamma_\mu\, \partial^\mu - k_0)\, e(kx) \mid \psi_{(1/2)}(x) \right\rangle_\sigma. \tag{26}$$

De (24), et (25) ou (26), on déduit une formule résolvant le problème de Cauchy.

3. Particule plongée dans un champ

Ici, les intégrales de Fourier réciproques, l'égalité de Parseval etc...., sont nécessairement des intégrales quadruples (bien que la norme physique reste une intégrale triple: l'hyperflux du courant de présence). Par exemple, le ψ d'une particule liée à un champ indépendant du temps prend la forme

$$\psi(x) = (2\pi)^{-2} \iiiint e^{i k_\lambda x^\lambda}\, \zeta(k)\, d^4\, k \tag{27}$$

dès qu'on exprime les fonctions propres de l'hamiltonien dans l'espace des $\vec{k}$ [3].

Bibliographie

[1] Riesz, M., *Actes du 10ème Congrès des mathématiciens scandinaves*, Copenhague (1946), p. 123–148.

[2] Schwinger, J., *Physical Review 74* (1948), p. 1439–1461 et *75* (1949), p. 677–679.

[3] Levy, M., *Proc. Roy. Soc. 204* [A] (1950), p. 149.

[4] Costa de Beauregard, O., *Journal de Physique 15* (1954), p. 810–816, *16* (1955) p. 770–780 et 17 (sous presse, 1956). – *Comptes Rendus 239* (1954) p. 1357.

Le problème de Cauchy dans la théorie relativiste de l'électromagnetisme et dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry

par Mme Y. Fourès-Bruhat (Aix-Marseille)

1. En relativité générale le champ électromagnétique, forme extérieure (cf. [1]) $F = F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, et la métrique, forme quadratique $g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ sont liés par les équations d'Einstein

$$S_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}\, R = \chi\, T_{ij} \tag{1}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4} g_{ij}\, F_{hk}\, F^{hk} - F_{ih}\, F_j^h$$

et les équations de Maxwell qu'on peut écrire (pour un vecteur courant nul):

$$dF = \delta F = 0 \tag{2}$$

où dF et δF désignent la différentiation et codifférentiation dans la métrique g.

Je cherche d'abord une solution telle que $F = d\varphi$. L'équation (2) prend alors la forme

$$\delta d\varphi = 0\,. \tag{2'}$$

On se donne, à l'instant initial $x^4 = 0$, φ et g et les dérivées $\partial\varphi_j/\partial x^4$, $\partial g_{ij}/\partial x^4$ satisfaisant aux conditions nécessaires

$$S_i^4 = 0\,, \quad (\delta d\varphi)^4 = 0\,. \tag{3}$$

Les coordonnées initiales étant isothermes (cf. [2]),

$$F^i \equiv \nabla_j\, g^{(i)j} \equiv g^{jh}\, \Gamma^i_{jh} = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0 \tag{4}$$

et le potentiel vecteur φ étant normalisé par

$$\delta\varphi = - \nabla_i\, \varphi^i = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0\,. \tag{5}$$

On déduit de (3), (4) et (5)

$$\partial F^i / \partial x^4 = \partial(\nabla_i \varphi^i) / \partial x^4 = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0\,.$$

Les identités

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{hk}\, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h\, \partial x^k} + H_{ij}(\partial_h\, g_{lk},\, g_{lk}) + \frac{1}{2}\, g_{ih}\, \partial_j F^h + \frac{1}{2}\, g_{jh}\, \partial_i F^h \tag{6}$$

$$(\delta d\varphi)_i = g^{hk}\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^h\, \partial x^k} + P_i(\partial_k\, \varphi_h,\, \partial_k\, g_{lh},\, g_{lh}) + \partial_i\, (\nabla_h\, \varphi^h + F^h\, \varphi_h) \tag{7}$$

montrent qu'en coordonnées isothermes, et pour un potentiel vecteur normalisé par $\delta\,\varphi = 0$ les équations de MAXWELL-EINSTEIN prennent la forme d'un système d'équations du second ordre hyperboliques, non-linéaires ou les dérivées du second ordre sont séparées et ont mêmes coefficients pour toutes les équations. J'ai construit [3] sans hypothèse d'analyticité une solution (unique) du problème de CAUCHY pour un tel système: sa valeur en un point ne dépend que des données initiales intérieures à un conoïde de sommet ce point (d'où propagation par ondes et identité des propagations de la gravitation et de l'électromagnétisme) et dépend continuement des données initiales.

Les identités de conservation et l'identité $\delta\delta\psi = 0$ permettent de montrer que cette solution est isotherme et que φ vérifie bien la condition $\delta\psi = 0$. On a donc effectivement construit une solution des équations de MAXWELL-EINSTEIN (1) et (2). On montre que cette solution est physiquement unique.

On peut également déterminer F par $\square\, F \equiv d\delta F + \delta d F = 0$ sans utiliser le potentiel vecteur φ dont le raisonnement précédent suppose l'existence (φ pourrait n'exister que localement). Un théorème d'unicité assure alors l'existence de φ moyennant son existence à l'instant initial.

2. *Théorie unitaire de* JORDAN-THIRY: les quinze inconnues $\gamma_{\lambda\mu}$ sont les coefficients de la métrique d'un espace de RIEMANN à cinq dimensions, cylindrique par rapport à x^0:

$$ds^2 = \gamma_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = -\xi^2\, (dx^0 + \beta\, \varphi_i\, dx^i) + d\hat{s}^2$$

$d\hat{s}^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ est la métrique de l'espace-temps, φ_i le potentiel vecteur, ξ un quinzième potentiel dont on peut discuter l'interprétation (cf. la conférence de A. LICHNEROWICZ).

Les inconnues $\gamma_{\lambda\mu}$ satisfont en dehors des masses aux équations:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{8}$$

($R_{\alpha\beta}$, tenseur de Ricci de l'espace à cinq dimensions). On se donne à l'instant initial $x^4 = 0$ les $\gamma_{\lambda\mu}$, $\partial\gamma_{\lambda\mu}/\partial x^4$ (c'est à dire g_{ij}, φ_i, ξ et leurs dérivées premières) satisfaisant aux conditions nécessaires:

$$S_\lambda^4 = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = 0. \tag{9}$$

Les coordonnées initiales étant isothermes

$$F^\mu \equiv \nabla_\lambda \gamma^{\lambda(\mu)} = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = 0, \tag{10}$$

on déduit de (9) et (10)

$$\partial_4 F^\mu = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = 0.$$

Une décomposition analogue à (6) permet de résoudre les équations (8) en coordonnées isothermes, les conditions de conservations $\nabla_\lambda \, S_\mu^\lambda \equiv 0$ montrant encore qu'on a ainsi effectivement une solution, physiquement unique, de ces équations. Cette solution dépend continuement des données initiales (en particulier ξ reste sensiblement constant s'il en est ainsi à l'instant initial).

Si l'on fait $\xi =$ const. dans les quatorze premières équations de la théorie unitaire de Jordan-Thiry, on obtient les équations de la théorie de Kaluza-Klein, équivalentes aux équations de Maxwell-Einstein, ce qui permet de retrouver les résultats du § 1.

Bibliographie

[1] Lichnérowicz, A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson (1955).
[2] Darmois, G., *Equations de la gravitation einsteinienne*, Memorial Sci. Math. (1927).
[3] Fourès-Bruhat, Y., Acta Matem. (1952).

Quantisierung allgemein-kovarianter Feldtheorien[1])

by P. G. BERGMANN (Syracuse)

This review paper reports on the present status of attempts to quantize theories which, like EINSTEIN's General Theory of Relativity, are invariant under general curvilinear coordinate transformations. The introduction deals with the motivation and justification of such a program and argues that general relativity may very likely contribute significantly to the theory of elemtary processes, even though gravitational effects as such are quantitatively many orders of magnitude smaller than electromagnetic and nuclear interactions. The second section describes the characteristic properties of covariant theories, that the canonical momentum densities never describe the velocities uniquely, that the Hamiltonian density contains arbitrary functions, and that aside from the canonical equations there are also algebraic conditions (constraints) between the canonical field variables. The third section is concerned with approaches to quantization and describes particularly the method of selecting 'true observables' from among the dynamical variables, which alone will appear as HILBERT operators in the quantized theory. Quantization with the help of coordinate conditions and with the help of Lagrangian methods are briefly discussed. The fourth section deals with spin and angular momentum in general relativity, and the last with the rôle of the strong conservation laws.

1. *Einleitende Betrachtungen.* Seit der Formulierung der konsequenten Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie einerseits, der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie anderseits, ist die Entwicklung der grundlegenden Ideen in der theoretischen Physik zu einem vorläufigen Abschluß gekommen. Auf der einen Seite haben wir eine konsequente Formulierung der Begriffe, die wir im Bereich der Elementarprozesse brauchen, eine Formulierung, die genügend weitärmelig zu sein scheint, um auch einen großen Teil der Kernphysik erfassen zu können. Auf der anderen Seite liefert uns die Relativitätstheorie in nahezu vollkommener Fassung eine klassische Feldtheorie, die uns nicht nur ein befriedigendes Verständnis für die Rolle des Bewegungszustands eines Beobachters liefert,

---

[1]) Diese zusammenfassende Darstellung kürzlicher Arbeiten wurde für die in Bern stattfindende Konferenz „Fünfzig Jahre Relativitätstheorie" vorbereitet. Die Unterstützung des Office of Naval Research, und neuerdings auch der National Science Foundation, wird vom Verfasser dankend anerkannt.

sondern darüber hinaus eine vollständige Theorie der Gravitation, insbesondere eine Begründung für die Gleichheit von träger und schwerer Masse, und schließlich auch noch die Theorie der ponderomotorischen Gesetze jeder Feldtheorie.

Praktisch sind die Beziehungen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie zum Mikrokosmos völlig verschieden. Sobald wir in das Gebiet hoher Energien kommen, brauchen wir die spezielle Relativitätstheorie; ja, beim heutigen Stand der Meßtechnik können wir eine nichtrelativistische Theorie des Elektrons und der elektromagnetischen Strahlung kaum mehr ernst nehmen. Infolgedessen hat die Quantisierung speziell-relativistischer Feldtheorien seit den frühen Dreißigerjahren stets im Mittelpunkt des theoretischen Interesses gestanden. Anderseits hat die allgemeine Relativitätstheorie ihren Hauptbeitrag im Gebiet des astronomisch-Großen gemacht. Hierfür liefert das Programm unserer Tagung beredtes Zeugnis. Das Verhältnis zwischen den gravitationellen und elektrostatischen Kräften, die zwei Elektronen aufeinander ausüben, ist eben von der Größenordnung 10^{-40}; solange man daher den Effekt der allgemeinen Relativitätstheorie nicht qualitativ, sondern nur quantitativ zu bewerten sucht, wird er noch auf lange Zeit zu vernachlässigen sein gegenüber den höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik, die noch gar nicht berechnet sind. Damit ist es wohl zu erklären, daß die große Mehrzahl der zeitgenössischen Theoretiker an den Beziehungen zwischen allgemeiner Relativitätstheorie und Quantentheorie nur wenig interessiert ist.

Mir scheint aber, daß man neben solchen quantitativen Betrachtungen qualitativ neue Möglichkeiten nicht völlig außer Acht lassen sollte. Die allgemeine Relativitätstheorie ist ja nicht lediglich eine Theorie der Gravitation, die wir getrost ignorieren dürfen, wenn die spezifisch gravitationellen Effekte klein sind. Genau wie die spezielle Relativitätstheorie behauptet die allgemeine, daß gewisse, früher als absolut erachtete Eigenschaften des Raumes und der Zeit nicht fixiert sind, sondern physikalisch veränderlich. Nun, wenn die Geometrie im Großen nicht streng flach ist (Minkowski-Metrik), so wird sie es auch nicht im Kleinen sein. Und was wesentlicher ist, wenn die Metrik ein System von veränderlichen Größen darstellt, dann darf man sie nicht physikalisch völlig anders behandeln als andere Felder. In einer konsequenten Theorie müssen die Gravitationspotentiale, genau so wie alle anderen Kräftefelder, quantisiert werden, sofern man an die grundsätzliche Richtigkeit der Feldquantisierung glaubt.

Fernerhin ist die allgemeine Relativitätstheorie bisher die einzige Feldtheorie, in der die ponderomotorischen Gesetze mit den eigentlichen Feldgesetzen eine logische Einheit bilden. Die Theorie der Bewegung von Par-

tikeln ist von EINSTEIN, INFELD, und HOFFMANN seit 1937 in immer vollkommenerer Weise entwickelt worden und von INFELD und WALLACE auf die Bewegung im elektrischen Feld ausgedehnt worden [1–4]. PAPAPETROU hat gezeigt, daß diese Theorie mathematisch äquivalent ist einer, in der die Teilchen zunächst ausgedehnt eingeführt werden, wenn man den „Formfaktor" nur genügend klein werden läßt [5]. Einige meiner Studenten haben auch im Detail ausgeführt, daß die Verknüpfung der Feld- mit den Bewegungsgesetzen eine generelle Eigenschaft aller allgemein-kovarianten Theorien ist, ähnlich wie etwa jede eichinvariante Theorie zu einem Erhaltungsgesetz der elektrischen Ladung führt [6, 7]. Da nun die Beziehung zwischen Feldgesetzen und Teilchenbewegung offensichtlich im Kleinen genauso interessant ist wie im Großen, ist zu vermuten, daß uns die allgemeine Relativitätstheorie, und insbesondere das Prinzip der allgemeinen Kovarianz auch im Kleinen angeht.

Ich möchte diesen letzteren Punkt noch etwas konkretisieren. Bekanntlich sind die dynamischen Gesetze, die die Bewegung von Punktladungen bestimmen, logisch von den partiellen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes unabhängig. Es ist durchaus möglich, die MAXWELLschen Gleichungen mit beliebig vorgegebenen Teilchenbahnen zu lösen. Es ist aber mißlich, daß man, um die LORENTZgleichungen überhaupt sinnvoll anschreiben zu können, das Gesamtfeld in der Umgebung einer Punktladung in unendliches „Selbstfeld" und endliches „einfallendes Feld" trennen muß. Diese Trennung geht noch an, solange die Feldgleichungen selbst in den eigentlichen Feldgrößen linear sind. Andernfalls verliert die Trennung jeden vernünftigen mathematischen Sinn. Insbesondere im Gebiet der Kernkräfte ist es aber garnicht ausgemacht, daß die „Feldgleichungen" (d. h. wohl die Wellengleichungen der Mesonenfelder) linear sind. Es wäre also garnicht uninteressant, die Teilchenbewegung so bestimmen zu können, wie es in der allgemeinen Relativitätstheorie gemacht wird: Als eine Folge der Feldgleichungen, deren Ausrechnung die Abtrennung des „Selbstfeldes" prinzipiell nicht erfordert.

Aus allen diesen Gründen glaube ich, daß der Quantentheoretiker der allgemeinen Relativitätstheorie gegenüber nicht indifferent sein sollte. Anderseits haben viele andere Theoretiker, und vor allen EINSTEIN selbst, den Standpunkt vertreten, daß die gegenwärtige Quantentheorie so grundsätzlich unbefriedigend ist, daß man von jedem Vereinigungsversuch absehen sollte [8]. Man müsse vielmehr auf dem Wege über die klassischen Feldbegriffe zu einer „einheitlichen Feldtheorie" kommen, die nicht nur irgendwie auch die Resultate der Quantentheorie liefert, etwa durch ihre extreme Nichtlinearität, sondern darüber hinaus alle Eigenschaften der Elementarteilchen voraussagt bzw. erklärt. Parallel mit der Arbeit in „einheitlicher Feldtheorie" haben andere, vornehmlich

de Broglie, Bohm, Wiener und Siegel gezeigt, daß der wesentlich probabilistische Charakter der heutigen Quantentheorie auf verschiedenartige Weise hinweginterpretiert werden kann, so daß die sicherlich richtigen Resultate der Theorie auch durch eine streng deterministische Theorie, plus die Konstruktion bestimmter Gibbsscher Gesamtheiten, reproduziert werden können [9–12].

Ohne das Interesse aller dieser Bestrebungen in Abrede stellen zu wollen, so glaube ich doch, daß es nicht unberechtigt ist, gleichzeitig an einem konservativeren Programm zu arbeiten. Dieses besteht darin, sowohl von der Quantentheorie als auch von der allgemeinen Relativitätstheorie gewisse Grundzüge zumindest als „relativ wahr" zu akzeptieren und zu sehen, ob diese Charakterzüge sich nicht vereinen lassen. Ein solches Programm involviert keinerlei physikalisches Glaubensbekenntnis zur einen oder zur anderen gegenwärtigen Theorie in aeternitatem, sondern eher ein vorsichtiges Tasten, welche Züge sich als relativ stabil erweisen werden. Hat doch die Geschichte der Physik immer wieder gezeigt, daß gewisse Züge jeder überholten Theorie in der Nachfolgerin wieder auferstehen. Wenn ich Sie also bitten möchte, das Programm des Vereinigungsversuchs als physikalisch vernünftig zu akzeptieren, so tue ich das nicht in einem polemischen Sinne, daß ich mein Rezept etwa als alleinseligmachend verkaufen möchte. Im Gegenteil, ich finde, daß wir im gegenwärtigen Zustand der noch immer schwankenden Grundlagen viele verschiedene Bestrebungen in allen möglichen Richtungen brauchen, die sich vielleicht gegenseitig befruchten und dadurch schließlich zu etwas brauchbarem führen können.

Schließlich möchte ich Sie gleich schonend darauf vorbereiten, daß ich leider keinerlei endgültige Resultate dieses Programms mitteilen kann, weil wir noch keineswegs am Ende sind. Ich hoffe, daß das, was ich berichten kann, zeigen wird, daß das Programm nicht uninteressant ist, daß man auf jeden Fall bereits gewisse Neukenntnisse erzielt hat. Und ich werde mich bemühen, Möglichkeiten für die Zukunft anzudeuten.

2. *Der singuläre Charakter allgemein-kovarianter Theorien.* Traditionell geht man zur Quantisierung von der kanonischen Form einer Theorie aus. Wenn das Variationsprinzip gegeben ist, so führt man zunächst die kanonisch konjugierten Impulsgrößen ein, um sodann die Hamiltonsche Funktion zu konstruieren. Bei der Quantisierung werden dann sowohl die Konfigurations- wie die Impulskoordinaten durch entsprechende Hilbertoperatoren ersetzt, deren Vertauschungsrelationen den Poissonschen Klammerausdrücken der klassischen Theorie nachgebildet sind.

Formal läuft diese Prozedur darauf hinaus, in der klassischen Theorie der Gruppe der kanonischen Transformationen besondere Bedeutung zuzuschreiben. Jede dynamische Veränderliche ist nicht nur eine physika-

lisch bedeutungsvolle Größe an sich, sie dient auch als Erzeugende einer infinitesimalen kanonischen Transformation. Beim Übergang zur quantisierten Theorie werden dann die kanonischen durch unitäre Transformationen ersetzt. Die Observabeln sind nun die Erzeugenden der infinitesimalen unitären Transformationen. Die Struktur der neuen Transformationsgruppe wird möglichst weitgehend der der kanonischen Gruppe nachgebildet, nur daß die Verwirklichung jetzt durch die Gruppe der unitären Transformationen im HILBERTraum geliefert wird. Die eigentliche Quantisierung besteht dann in der Untersuchung der neuen Gruppe, wobei insbesondere die Eigenwerte der verschiedenen physikalisch interessanten Operatoren die möglichen Meßergebnisse der entsprechenden Observabeln sein sollen.

Für den ersten Schritt in dieser Prozedur ist es nun wesentlich, daß die Beziehung zwischen den zeitlichen Ableitungen der Konfigurationskoordinaten (die ich weiterhin als ,,Geschwindigkeiten" bezeichnen werde) und den Impulskoordinaten ein-eindeutig sei. Denn im Ausdruck für die HAMILTONsche Funktion,

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k(q, p) - L\,[q_k, \dot{q}_k(q, p)]\,, \tag{2.1}$$

ist es wesentlich, daß die Geschwindigkeiten auch wirklich durch die Impulskoordinaten ausgedrückt werden können. Schon an dieser Stelle bereiten allgemein-kovariante Theorien grundsätzliche Schwierigkeiten, die wohl zuerst von ROSENFELD erkannt worden sind [13, 14]. Damit die Beziehung nämlich ein-eindeutig sei, muß die Matrix der Ableitungen der Impulskoordinaten nach den Geschwindigkeiten,

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k\, \partial \dot{q}_l}\,, \tag{2.2}$$

regulär sein, darf also keine Nullvektoren besitzen. Dies ist aber gerade bei allgemein-kovarianten Theorien der Fall. Angenommen, wir haben es mit einer Feldtheorie zu tun, in der also die Konfigurationskoordinaten irgendwelche Feldkomponenten y_A sind (der Index A ist ein Sammelindex, der in beliebiger Weise zur Identifizierung der individuellen Komponenten dient, und nicht etwa ein Koordinatenindex). Bei einer infinitesimalen Koordinatentransformation, die etwa durch die Änderungen $\xi^\varrho(x)$ der Koordinatenwerte an jedem Weltpunkt beschrieben sei, mögen sich die y_A *als Funktionen ihrer Argumente* x nach dem Schema

$$\bar{\delta} y_A = c_{A\varrho}\, \xi^\varrho + c^{\sigma}_{A\varrho}\, \xi^\varrho{}_{,\sigma} \tag{2.3}$$

transformieren. Dann wird die LAGRANGEsche Dichte, wegen der Invarianz der Theorie einer beliebigen Koordinatentransformation gegenüber, sich nur um eine vollständige Divergenz ändern dürfen. Wir haben also

$$\begin{aligned}\bar{\delta} L &= \frac{\partial L}{\partial y_A}\,\bar{\delta} y_A + \frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\,\bar{\delta} y_{A,\varrho} \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial y_A} - \left(\frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\right)_{,\varrho}\right]\bar{\delta} y_A + \left(\frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\,\bar{\delta} y_A\right)_{,\varrho} = Q^{\varrho}{}_{,\varrho}\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Hier bezeichnet weiterhin das Symbol $\bar{\delta}$ die infinitesimale Änderung einer Größe als Funktion der Koordinaten, nicht an einem festgehaltenen Weltpunkt. Unter Berücksichtigung von (2.3) finden wir nach einer kurzen Umrechnung:

$$\begin{aligned}\left[L^A c_{A\varrho} - (L^A c^{\sigma}_{A\varrho})_{,\sigma}\right]\xi^{\varrho} &= \left[Q^{\varrho} - \frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\,\bar{\delta} y_A - L^A \sigma^{\varrho}_{A\sigma}\,\xi^{\sigma}\right]_{,\varrho}, \\ L^A &\equiv \frac{\partial L}{\partial y_A} - \left(\frac{\partial L}{\partial y_{A,\sigma}}\right)_{,\sigma}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Da nun ξ^{ϱ} beliebig ist, folgt der Satz von vier Identitäten, die wir die BIANCHIschen Identitäten nennen wollen,

$$L^A c_{A\varrho} - (L^A c^{\sigma}_{A\varrho})_{,\sigma} \equiv 0\,. \tag{2.6}$$

Diese Identitäten, die also eine Folge der allgemeinen Kovarianz sind, führen nun zu einem direkten Widerspruch zur Regularitätsbedingung (2.2). Wenn wir nämlich in diesen Identitäten die Glieder mit verschiedenen Differentiationstermen trennen, so müssen diese separat verschwinden [15]. Die höchsten Terme enthalten die Feldgrößen dreimal differenziert. Wenn wir nun speziell die Koeffizienten der dritten Ableitungen nach der Koordinate x^4 (der „Zeit") aufschreiben, so erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_A\,\partial \dot{y}_B}\,c^4_{A\varrho} \equiv 0\,, \tag{2.7}$$

die also explizit Nullvektoren der Matrix (2.2) liefern. Hiermit ist gezeigt, daß allgemein eine kovariante Theorie, deren Feldgleichungen sich von einem Variationsprinzip herleiten lassen, in dem soeben besprochenen Sinn „singulär" ist.

Da sich nun ergeben hat, daß die Geschwindigkeiten nicht eindeutige Funktionen der Impulse sein können, da aber anderseits die Zahl der einen Größen der der andern gleich ist, so folgt, daß nicht alle Impuls-

komponenten frei wählbar sind. Wir haben vielmehr algebraische (d.h. keine zeitlichen Ableitungen enthaltende) Beziehungen zwischen ihnen; wir können diese sofort aus (2.7) ablesen, indem wir sie in die Form schreiben

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}_B}\left(\pi^A c^4_{A\varrho}\right) = 0\,, \qquad \pi^A = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A}\,. \tag{2.8}$$

(Hier ist die Annahme gemacht worden, die im allgemeinen zutrifft, daß die Größen $c^4_{A\varrho}$ nur von undifferenzierten y_A abhängen.) Infolgedessen haben wir die „Primärbedingungen"

$$c^4_{A\varrho}\,\pi^A - K_\varrho(y) = 0\,. \tag{2.9}$$

Die Größen K_ϱ hängen nur von y_A ab und lassen sich stets leicht bestimmen. Angenommen, wir hätten eine HAMILTONsche Funktion konstruiert. Dann wären wir in der Lage, die Zeitabhängigkeit jedes Funktionals der kanonischen Feldgrößen explizit hinzuschreiben. Indem wir nun verlangen, daß sämtliche zeitliche Ableitungen der Primärbedingungen verschwinden, erhalten wir weitere, „Sekundärbedingungen" usw. Glücklicherweise läßt sich zeigen, daß es nur eine endliche Zahl derartiger weiterer Bedingungen gibt. In den meisten Theorien, und insbesondere in der kanonischen Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie, gibt es insgesamt nur acht Bedingungen, von denen die Hälfte Primärbedingungen sind.

Es erweist sich nun als möglich, eine HAMILTONsche Funktion zu konstruieren, die frei von Geschwindigkeiten ist [16, 17]. Man kann zu diesem Zweck zeitweilig neue Variablen einführen, so daß jede der Primärbedingungen nur eine Impulsdichte enthält. Im endgültigen Ausdruck für H kehrt man dann wieder zu den ursprünglichen Variablen zurück. Der Ausdruck für H ist aber nicht eindeutig. Er enthält die vier Primärbedingungen, jede mit einer völlig willkürlichen Funktion multipliziert. Die Wahl dieser vier Funktionen ist der Einführung von „Koordinatenbedingungen" in der üblichen Theorie äquivalent. In der kanonischen Fassung bleibt die volle Kovarianz also nur erhalten, wenn man diese willkürlichen Funktionen nicht festlegt. Die vollständige Formulierung der Theorie erfordert also die Ausrechnung der HAMILTONschen Funktion und sämtlicher Primär- und Sekundärbedingungen [18, 19].

Eine ganz ähnliche Formulierung stammt von DIRAC [20]. Anstatt willkürliche Funktionen in die HAMILTONsche Funktion einzuführen, läßt er in ihr eine Reihe von Geschwindigkeiten, derart, daß sich leere Beziehungen ergeben, wenn immer man versucht, diese Geschwindigkeiten durch kanonische Größen auszudrücken. Die DIRACsche Formulierung ist der unserigen völlig äquivalent.

Nur der Vollständigkeit wegen möchte ich noch erwähnen, daß sowohl Dirac wie wir unabhängig voneinander besondere Hilfskoordinaten („Parameter") eingeführt haben, wodurch die gewöhnlichen Koordinaten formal dynamische Veränderliche werden und die ganze Theorie an formaler Eleganz gewinnt [20, 21]. Z.B. wird die Lagrangesche Funktion homogen in den Geschwindigkeiten (vom ersten Grad), die Impulskoordinaten homogen vom nullten Grad; wie man erwarten würde, werden lineare Impuls- und Energiedichte den Koordinaten kanonisch konjugiert. Es hat sich aber erwiesen, daß diese formalen Vorteile durch ganz erhebliche Komplikationen in der expliziten Form der Theorie kompensiert werden. Es erscheint, daß Parameter nur für ganz spezielle Untersuchungen formaler Art vorteilhaft sind.

In der Hamiltonschen Version einer kovarianten Feldtheorie entspricht einer Koordinatentransformation natürlich eine ganz bestimmte kanonische Transformation. Von besonderem Interesse ist die Erzeugende infinitesimaler kanonischer Transformationen. Diese ist nämlich eine ganz bestimmte Linearkombination der Primär- und Sekundärbedingungen der Theorie. Die Koeffizienten dieser Bedingungen sind die „beschreibenden" Größen ξ^{ϱ} und ihre zeitlichen Ableitungen, die wir oben in (2.3) eingeführt hatten. Die infinitesimalen Transformationen bilden einen Gruppenkeim mit einer bestimmten Lieschen Algebra. Diese spiegelt sich ganz genau wider in den Poissonschen Klammerausdrücken der Zwangsbedingungen untereinander. Der Beweis, daß es nur eine endliche Anzahl von Bedingungen gibt, wird zweckmäßigerweise mit Hilfe dieser Gruppeneigenschaft geführt [18].

3. *Die Möglichkeit der Quantisierung.* Es fragt sich nun, wie man bei der Quantisierung einer Theorie vorzugehen hat, die zwar in kanonischer Fassung vorliegt, in der aber eine Reihe von algebraischen Bedingungen zwischen den kanonischen Veränderlichen erfüllt sein muß. Ist es denkbar, alle diese Veränderlichen als Hilbertoperatoren zu behandeln?

Dirac hat dieser Frage Beachtung geschenkt und hat sie verneint [20]. Da er nicht in erster Linie vom kovarianztheoretischen Gesichtspunkt ausging, betrachtete er gleich zwei verschiedene Arten von Bedingungen, die er solche der „ersten Klasse" und der „zweiten Klasse" nannte. Wenn der Poissonsche Klammerausdruck zwischen einer Bedingung und allen anderen verschwindet (evtl. modulo der Bedingungen selbst), so haben wir es mit einer Bedingung erster Klasse zu tun, andernfalls mit einer zweiter Klasse. Unsere Primär- und Sekundärbedingungen, die die Folge von Kovarianzeigenschaften sind, gehören alle zur ersten Klasse; aber bei der Hyperquantisierung von Materiewellen trifft man auch auf Bedingungen zweiter Klasse. Offensichtlich können nun Bedingungen der zweiten Klasse nicht Hilbertoperatoren sein. Denn angenommen, wir

betrachten einen Zustand, der physikalisch zulässig ist, der also für jede der Bedingungen C^a die Gleichung

$$C^a \Psi = 0 \tag{3.1}$$

erfüllt, dann führt offenbar die Vertauschungsrelation

$$[C^a, C^b] = C^{ab} \neq 0\,, \tag{3.2}$$

die dem entsprechenden POISSONschen Klammerausdruck nachgebildet ist, auf einen Widerspruch, insbesondere, wenn C^{ab} eine C-Zahl ist. Aber auch Bedingungen der ersten Klasse führen zu Schwierigkeiten. Zu einer Bedingung erster Klasse läßt sich nämlich stets eine dynamische Veränderliche finden, die zur Bedingung kanonisch konjugiert ist. Nun ist es wohlbekannt, daß von zwei kanonisch konjugierten HILBERToperatoren keiner auf Hauptachsen gebracht werden kann. Die Forderung (3.1), angewandt auf eine Bedingung erster Klasse, liefert also das widersprüchliche Resultat, daß ein physikalisch zulässiger Zustand Eigenvektor eines bzw. mehrerer Operatoren sein muß (mit dem Eigenwert Null), die keine Eigenvektoren haben dürfen. Und so hätten wir die Forderung, daß alle physikalisch zulässigen Zustände nur uneigentliche Vektoren, d. h. außerhalb des HILBERTraums liegende Häufungspunkte sein müßten. Unter anderem wären sie alle nichtnormalisierbar.

Man kann sich allen diesen Schwierigkeiten entziehen, wenn man darauf verzichtet, die Vertauschungsrelationen der Quantenoperatoren direkt aus den POISSONschen Klammerausdrücken der klassischen Theorie herzuleiten. In der Gegenwart von Zwangsbedingungen aller Art ist die Gruppe der kanonischen Transformationen auch nicht die einzige oder die natürlichste Transformationsgruppe im klassischen Phasenraum [22]. Die Zwangsbedingungen definieren im Phasenraum einen Unterraum, der aus den physikalisch zulässigen (klassischen) Zuständen besteht. Es liegt also nahe, nach einer Transformationsgruppe zu suchen, die diesen Unterraum auf sich selbst abbildet. Eine solche Transformationsgruppe gibt es nun tatsächlich. Sie besteht aus allen den Koordinatentransformationen im klassischen Phasenraum, die die kanonische Form der Bewegungsgleichungen reproduzieren und die Form der Zwangsbedingungen unverändert lassen. Auch für diese Transformationsgruppe gibt es Erzeugende, und ferner Klammerausdrücke, die den Kommutatoren der infinitesimalen Transformationen entsprechen. Ich möchte diese Klammerausdrücke im Gegensatz zu den POISSONschen nach DIRAC benennen. Die DIRACklammer zwischen einer Zwangsbedingung und irgendeiner Veränderlichen ist stets Null. Falls es aber Bedingungen erster Klasse gibt, so ist die DIRACklammer nicht für alle dynamischen Veränderlichen definiert.

Bevor ich auf die Details eingehe, möchte ich noch zur weiteren Rechtfertigung dieser Transformationsgruppe anführen, daß sie ermöglicht, die Zwangsbedingungen direkt Null zu setzen. Wir können die Gleichungen (3.1) durch die schärferen Operatorengleichungen

$$C^a = 0 \tag{3.3}$$

ersetzen.

Im Einzelnen kommt man zu den DIRACschen Klammern folgendermaßen. Wenn wir zunächst die kanonischen Koordinaten im klassischen Phasenraum mit y^ϱ bezeichnen und den antisymmetrischen konstanten Tensor, mit dem man POISSONklammern bildet, mit $\varepsilon^{\varrho\sigma}$, dann sind die Bewegungsgleichungen und die Zwangsbedingungen folgende:

$$\dot{y}^\varrho = \varepsilon^{\varrho\sigma} H_{,\sigma}, \qquad \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \varepsilon^{\varrho\sigma} A_{,\varrho} H_{,\sigma}, \qquad C^a = 0. \tag{3.4}$$

Wir führen nun zunächst Koordinaten auf der durch die Zwangsbedingungen definierten Hyperfläche ein, x^m, wodurch man dann die Hyperfläche selbst durch die Funktionen $y^\varrho(x^m)$ charakterisieren kann. Damit die Theorie innerlich widerspruchsfrei sein kann, dürfen die Bewegungsgleichungen natürlich nicht aus der Hyperfläche herausführen. Wir haben infolgedessen:

$$\begin{gathered} \dot{y}^\varrho = \frac{\partial y^\varrho}{\partial x^m} \dot{x}^m, \qquad \varepsilon_{mn} \dot{x}^n = \frac{\partial H}{\partial x^m} = H_{,\varrho} \frac{\partial y^\varrho}{\partial x^m}, \\ \varepsilon_{mn} = \frac{\partial y^\varrho}{\partial x^m} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^n} \varepsilon_{\varrho\sigma}, \qquad \varepsilon_{\varrho\sigma} \varepsilon^{\sigma\tau} = \delta^\tau_\varrho. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Hierbei ist nichts darüber gesagt, ob der neue Tensor ε_{mn} auf der Hyperfläche regulär ist oder ob seine Determinante verschwindet. Das letztere ist nämlich immer der Fall, wenn es Zwangsbedingungen erster Klasse gibt. Wir verlangen jetzt, daß unsere infinitesimalen Transformationen der Parameter x^m untereinander die Form der Gleichungen (3.5) ungeändert lassen, außer daß sich natürlich die Form der HAMILTONschen Funktion ändern darf. Insbesondere sind die Komponenten des Tensors ε_{mn} als invariante Funktionen der Parameter x^m zu behandeln. Es stellt sich nun heraus, daß, fast genau wie bei infinitesimalen kanonischen Transformationen, eine Funktion $\Gamma(x^m)$ eine infinitesimale Transformation erzeugt, die allen Erfordernissen genügt:

$$\varepsilon_{mn}\, \delta x^n = \frac{\partial \Gamma}{\partial x^m}, \quad \delta H = -\frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Die Erzeugende ist hier eine Funktion der x^m. Abseits der „erlaubten" Hyperfläche braucht sie gar nicht definiert zu sein. Wenn alle Zwangsbedingungen solche zweiter Klasse sind, so ist der Tensor ε_{mn} regulär, besitzt also einen reziproken Tensor. Man kann dann die Transformationsbedingungen (3.6) nach den Transformationsgrößen δx^n auflösen, und diese sind eindeutig durch die Erzeugende bestimmt. Besitzt die antisymmetrische Form ε_{mn} aber Nullvektoren, dann ist die Transformation nicht durch die Erzeugende völlig bestimmt, ja es gibt Transformationen, die zur Erzeugenden Null gehören. Dies sind die Transformationen

$$\delta x^n = U^n_{(s)}, \tag{3.7}$$

wo die neuen Größen $U^n_{(s)}$ die Nullvektoren von ε_{mn} sind. In diesem Falle legen aber die Gleichungen (3.6) auch der Erzeugenden Beschränkungen auf. Wenn wir sie mit einem Nullvektor multiplizieren, so finden wir

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x^m} U^m_{(s)} = 0. \tag{3.8}$$

Es zeigt sich also, daß die Anzahl der algebraisch voneinander unabhängigen Erzeugenden nicht gleich der der Parameter x^m ist, sondern daß diese Zahl noch weiter um die der Nullvektoren $\vec{U}_{(s)}$ vermindert werden muß. Man kann auch weiterhin zeigen, daß diese Einschränkungen innerlich widerspruchsfrei dann und nur dann sind, wenn die Bedingungen erster Klasse untereinander eine Funktionengruppe bilden, ihre Poisson-klammern miteinander also modulo der Bedingungen erster Klasse verschwinden [23].

Im Falle von Nullvektoren bilden die Transformationen, die zur Erzeugenden Null gehören, eine invariante (normale) Untergruppe. Bilden wir die Faktorgruppe, so erhalten wir einen Gruppenkeim, der durch die erlaubten Erzeugenden (d. h. durch die Funktionen der x^m, die den Bedingungen (3.8) gehorchen), ein-eindeutig verwirklicht ist. Wir haben also eine neue Gruppe gefunden, die sich im Prinzip zur Darstellung durch Hilbertoperatoren eignet.

Die Diracschen Klammern erhält man selbstverständlich, indem man die Kommutatoren der Mitglieder der (Faktor-)Gruppe bildet und ihre Erzeugende bestimmt. Diese Klammern sind dadurch eindeutig bestimmt. Falls alle Zwangsbedingungen zur ersten Klasse gehören, unterscheiden sich die Diracklammern von Poissonklammern nur dadurch, daß sie für gewisse Größen nicht definiert sind. Andernfalls bestehen zwischen den zwei Klammertypen Unterschiede auch für solche Veränderliche, für die beide wohldefiniert sind.

Die durch die Diracmethode ausgeschlossenen Veränderlichen sind solche, deren Poissonklammern mit den Bedingungen erster Klasse nicht verschwinden. Da aber die Bedingungen erster Klasse die (Hamiltonschen) Erzeugenden der invarianten Transformationen sind, so folgt, daß die noch zulässigen Erzeugenden Invarianten sein müssen. Um Ihnen ein Gefühl dafür zu geben, was dies involviert, möchte ich schnell die Veränderlichen bezeichnen, die in der Theorie des elektromagnetischen Felds durch die Eichkovarianz ausgeschlossen sind [24]. Da die Zwangsbedingungen auf das Verschwinden der zum skalaren Potential konjugierten Impulsdichte und auf die Bestimmung des longitudinalen elektrischen Feldes durch die Ladungsdichte hinauslaufen, so folgt, daß die einzigen Erzeugenden die transversalen Anteile des Vektorpotentials (also das magnetische Feld) und des elektrischen Feldes (und nur von diesen abhängige Funktionale) sind. Ferner dürfen nur ganz bestimmte Kombinationen der Elektronenwellenfunktionen mit dem Vektorpotential als Erzeugende eingeführt werden, nämlich solche, die eichinvariant sind.

Um nun wieder auf die Theorien zurückzukommen, die krummlinigen Koordinatentransformationen gegenüber invariant sind, so müssen wir hier die Erzeugenden auf solche Größen beschränken, die derartigen Transformationen gegenüber invariant sind. Dies ist indes leichter gesagt als getan. Bisher ist nämlich in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht eine einzige nicht-triviale Invariante bekannt. Es genügt ja nicht, skalare Felder zu finden; als Funktionen ihrer Argumente (der Koordinaten) transformieren sich Skalare auch. Wahre Invarianten, glaube ich, werden sich als äußerst komplizierte Funktionale der gegenwärtig bekannten Feldgrößen entpuppen.

Man könnte nun eine Theorie ablehnen, die in Bezug auf zulässige Veränderliche derartig „exklusiv" ist. Eine solche Ablehnung erscheint mir aber voreilig. Am Beispiel der elektromagnetischen Theorie sehen wir, daß die verbotenen Größen, also das skalare Potential, der longitudinale Teil des Vektorpotentials und derjenige der elektrischen Feldstärke, entweder durch Eichtransformationen beliebiger Werte fähig sind oder aber durch andere Zustandsgrößen (die Ladungsdichte) bereits festgelegt sind. Diese Größen können also entweder überhaupt nicht auf Grund von Anfangsbedingungen zu einer Zeit für eine andere Zeit vorausgesagt werden, oder sie sind nicht unabhängig. Zwei formal vorgegebene physikalische Situationen lassen sich entweder als wesentlich verschieden oder aber als zwei verschiedene Beschreibungen desselben objektiven Zustands nur auf Grund ihrer Invarianten identifizieren. Ich glaube also, daß nur die im Diracschen Formalismus zugelassenen Erzeugenden physikalisch als „wahre Observabeln" anzusprechen sind. Deshalb muß man dieses Pro-

gramm der Quantisierung sowohl formal als auch physikalisch als vernünftig ansehen.

Wie soll man nun Invarianten finden? Bisher sind mir nur zwei Möglichkeiten bekannt. Beide sind noch nicht gründlich untersucht. KOMAR, ein Schüler WHEELERS, hat vorgeschlagen, auf systematische Weise zunächst skalare Felder zu bilden, im allgemeinen höhere Potenzen des Krümmungstensors, in vielfacher Weise kontrahiert [25]. Indem man nun vier algebraisch unabhängige Skalare als neue „invariante Koordinaten" einführt, läßt sich eine gegebene RIEMANNsche Mannigfaltigkeit koordinatenunabhängig beschreiben, wenn wir mindestens zehn weitere Skalarfelder als Funktionen der vier ersten angeben. Die große Schwierigkeit dieses Programms liegt darin, daß die so gefundenen Invarianten einen enorm hohen Differentationsgrad haben. Dies ist aber vielleicht nicht zu vermeiden, auch nicht auf andere Weise.

Nach einem etwas anrüchigen Abzählverfahren kann man vermuten, daß die Zahl der wahren Observabeln des Gravitationsfeldes vier pro dreidimensionalem Raumpunkt beträgt, also dieselbe, wie im elektromagnetischen Feld. Man kann das so begründen, daß „Gravitonen" Spin 2 und verschwindende Ruhmasse haben, daß also in einer linearisierten Theorie im Impulsraum zu jedem Werte des Fortpflanzungsvektors k genau zwei unabhängige Normalschwingungen gehören, von denen jede sich durch Angabe der Amplitude und der Phase vollständig festlegen läßt [26].

NEWMAN hat nun vorgeschlagen, diesen Invarianten durch ein Näherungsverfahren auf die Spur zu kommen, welches von der linearisierten Theorie ausgeht [27]. Wenn man die Gravitationspotentiale nach einem *ad hoc* Parameter entwickelt, wobei die nullte Näherung der flache MINKOWSKIsche Raum ist, so kann man auch die Koordinatentransformationen in ähnlicher Weise in Potenzreihen entwickeln, derart, daß die auf beliebiger Stufe abgebrochene Theorie gegenüber einer Transformationsgruppe invariant ist, die aus der Gruppe krummliniger Koordinatentransformationen dadurch hervorgeht, daß man auch deren Entwicklungen an derselben Stelle abbricht. Von der ersten Näherung an darf man in der Transformationsgruppe willkürliche Funktionen einführen. Die nullte Näherung besteht aber nicht aus der Identität, sondern ist die LORENTZ-gruppe. Die erste Näherung für sich allein ist kommutativ und der Eichgruppe sehr ähnlich, aber nicht kommutativ zusammen mit der nullten Näherung. Die erste Näherung liefert dann genau die PAULI-FIERZschen Gleichungen für Gravitonen. Darüber hinaus ist noch nichts bekannt. Bis zur ersten Näherung läßt sich das Programm, Invarianten zu finden und die Theorie nur mit ihrer Hilfe zu formulieren, mühelos durchführen. Aber erst danach wird es wirklich interessant. Immerhin ist es vielleicht bemerkenswert, daß, wenn man auf FOURIERzerlegung verzichtet, die wahren

Observabeln der ersten Näherung die doppelt transversalen Potentiale und ihre kanonisch konjugierten, also nichtlokale Größen sind, die man durch Integrale ausdrücken muß.

Es liegt nahe zu fragen, ob man nicht die Theorie durch Einführung von Koordinatenbedingungen künstlich „regulär" machen könnte, ähnlich wie FERMI dies mit dem elektromagnetischen Feld getan hat, wonach die Quantisierung dann ziemlich ohne Schwierigkeiten durchführbar sein dürfte. In der klassischen Theorie läßt sich tatsächlich leicht zeigen, daß man auf diese Weise sofort zu einer HAMILTONschen Formulierung kommt, in der dann die Koordinatenbedingungen und ihre ersten zeitlichen Ableitungen in gewohnter Weise als (acht) sich selbst erhaltende Nebenbedingungen eingeführt werden müssen. Versucht man aber dann die Quantisierung, so bereitet der wesentlich nichtlineare Charakter aller allgemein-kovarianten Theorien fast unüberbrückbare Schwierigkeiten. Man muß dann nämlich sowohl in der HAMILTONschen Funktion als auch in den Nebenbedingungen die Faktoren so ordnen, daß man in keine Widersprüche gerät. Dies ist bisher niemandem gelungen [28]. Überdies, wenn man wirklich mit diesem Problem fertig würde, so wüßte man dann immer noch nicht, ob das Endprodukt Resultate liefert, die von der zufällig gewählten Form der Koordinatenbedingungen unabhängig sind, ob, mit anderen Worten, die resultierende Quantentheorie allgemein kovariant ist.

Eine andere verlockende Möglichkeit ist die Lagrangesche Quantisierung, die wohl im gegenwärtigen Stadium mehr ein Programm als eine abgeklärte Prozedur ist [29–31]. Zunächst funktioniert das von PEIERLS vorgeschlagene Programm nur für „reguläre" Theorien, und ist außerdem nicht darstellungsinvariant. FEYNMANS Integrale divergieren wahrscheinlich für „singuläre" Theorien, und SCHWINGERS verschiedene Vorschläge unterliegen denselben Beschränkungen wie PEIERLS'. Wir haben nun zunächst einmal den Begriff der kanonischen Transformation im LAGRANGEschen Formalismus eingeführt und versucht, Transformationsgruppen auch für „singuläre" Theorien zu konstruieren [32]. Soweit uns dies gelungen ist, scheinen sie der DIRACschen Faktorgruppe im Phasenraum äquivalent zu sein [33]. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß man in einer folgerichtigen LAGRANGEschen Quantisierung nichts gegenüber der kanonischen Methode gewinnt. Augenblicklich halte ich diese Frage aber noch für offen.

Diesen Möglichkeiten gegenüber scheint die Methode nach DIRAC jetzt zumindest logisch einwandfrei zu sein. Falls es gelingen wird, alle algebraisch unabhängigen Invarianten der Theorie zu finden, so wird die Faktorenordnung in der HAMILTONschen Funktion insofern willkürlich sein, als sie weder die Kovarianz der Theorie noch ihre formale Widerspruchsfreiheit affiziert. Selbstverständlich bedeutet dies nicht, daß zwei

HAMILTONsche Funktionen mit verschiedenen Faktorfolgen äquivalent seien. Im Gegenteil, hier haben wir in der Quantentheorie eine extra Freiheit, der in der klassischen Theorie nichts entspricht. Was ich behaupte, ist nur, daß die Faktorfolgen nicht durch formale Forderungen eingeengt sind, die praktisch unübersehbar sind.

4. *Spin in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Offensichtlich ist es unwahrscheinlich, daß man je zu einer zufriedenstellenden Vereinigung der allgemeinen Relativitätstheorie und der Mikrophysik kommen wird, wenn es nicht gelingt, den Spin ins Schema der allgemeinen Relativitätstheorie einzubauen. Dies ist auf zwei verschiedene Weisen möglich, die beide zum selben Resultat liefern [34–38]. Ich möchte diese mathematischen Dinge nur ganz kurz skizzieren, weil sie wohl kaum zum Hauptthema meines Berichts gehören.

Erstens ist es möglich, anstelle der Metrik im vierdimensionalen Zeitraum-kontinuum zwei Systeme von hyperkomplexen Feldern einzuführen, γ_ϱ und γ^ϱ, die folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\mu) = \delta_\mu^\nu, \quad \gamma_\mu \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma_\mu = 4. \tag{4.1}$$

Dann läßt sich sofort zeigen, daß alle kovarianten γ_ϱ mit den Antikommutatoren $1/2\,(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)$ kommutieren, und ebenso die kontravarianten γ^ϱ mit den kovarianten Antikommutatoren $1/2\,(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu)$. Ferner sind die zwei Antikommutatoren zueinander reziprok, und sie dienen dazu, die kontravarianten und die kovarianten γ's durch Hinauf- und Hinabziehen der Indices ineinander überzuführen [39]. Mit anderen Worten, die Gleichungen (4.1) führen unmittelbar zur Konstruktion eines metrischen Tensors zurück, sofern wir nur annehmen, daß das eine oder das andere System der γ's eine vollständige Basis für die Algebra des hyperkomplexen Zahlsystems (der Sedenionen) ist.

Zusätzlich zu den Koordinatentransformationen müssen wir nun auch die Ähnlichkeitstransformationen betrachten, die in jedem Weltpunkt ganz beliebig angesetzt werden können und denen gegenüber die Theorie invariant sein muß. Konstruiert man nun, um zu einer Analysis zu kommen, einen spin-affinen Zusammenhang und bildet den entsprechenden Spin-Krümmungstensor (wobei selbstverständlich verlangt wird, daß die kovariante Ableitung von γ^ϱ verschwindet), so stellt sich heraus, daß die Geometrie keinerlei invariante Variationsprinzipien zuläßt, die es nicht schon in der RIEMANNschen Geometrie gibt. Dagegen besteht die Möglichkeit, zusätzlich zu den γ^ϱ, die also eine Art geometrische Grundstruktur darstellen, Wellenfunktionen einzuführen, die dann die Bildung zusätzlicher Glieder in der LAGRANGEschen Funktion gestatten. So ist es dann

möglich, eine Theorie zu konstruieren, die neben dem eigentlichen Gravitationsfeld sowohl Photonen als auch Elektronen enthält.

Die zweite Möglichkeit ist folgende: In jedem Weltpunkt führe man vier aufeinander senkrechte Einheitsvektoren ein. Mit deren Hilfe kann man dann jeden Vektor oder Tensor der RIEMANNschen Geometrie in Komponenten nach den „Vierbeinen" (anstelle der Koordinaten) zerlegen. Man führt nun konstante DIRACsche γ's ein, und außerdem wiederum Wellenfunktionen mit Spin usw. Man konstruiert darauf geometrische Gebilde, die sowohl Koordinatentransformationen wie Beintransformationen gegenüber invariant sind. Die Spintransformationen sind mit den Beintransformationen zusammengekoppelt, wenn man den γ^n feste, unveränderliche Werte zuschreibt.

Mit und ohne Vierbeine erhält man genau dieselben Kovarianten. Die Einführung der Beine ist aber deshalb interessant, weil die Beintransformationen in jedem Weltpunkt beliebig wählbare LORENTZtransformationen darstellen. Es ist uns dadurch z.B. gelungen, in die allgemeine Relativitätstheorie (mit Spinorenfeld) ein System von sechs Größen einzuführen, die im Falle einer flachen Metrik genau ins Drehmoment übergehen und die auch im gekrümmten Raum strengen Erhaltungssätzen genügen [40]. Sofern man eine solche Theorie quantisieren bzw. hyperquantisieren kann, sollte sie alle normalen Ergebnisse der Quantenelektrodynamik mit Elektronen enthalten und außerdem allgemeininvariant sein.

5. *Erhaltungssätze.* Bevor ich schließe, möchte ich noch kurz auf die Rolle der durch die allgemeine Kovarianz bedingten Erhaltungssätze eingehen. In kovarianten Theorien gibt es nämlich Ausdrücke, deren Divergenz verschwindet, auch wenn die Feldgleichungen nicht erfüllt sind, und die den üblichen kanonischen Energie-Impulsdichten modulo der Feldgleichungen gleich sind. Diese Erhaltungssätze haben wir „stark" genannt, im Gegensatz zu den üblichen, „schwachen".

Die starken Erhaltungssätze hängen aufs engste mit der EINSTEIN-INFELD-HOFFMANNschen Theorie der ponderomotorischen Gesetze zusammen. Mit ihrer Hilfe kann man zeigen, daß Oberflächen, die Singularitäten des Feldes umgeben, Integrale zulassen, deren zeitliche Ableitung durch ein anderes Oberflächenintegral streng bestimmt ist. Zur Formulierung dieser Oberflächenintegralsätze ist übrigens kein Näherungsverfahren notwendig [7]. Die Oberflächenintegrale, deren zeitliche Ableitung bestimmt ist, stellen die im Innern enthaltene Energie und Impuls dar, die bestimmenden Integrale infolgedessen die äußere Kraft und Leistung am Innern.

In der klassischen Feldtheorie sind Teilchen Singularitäten des Feldes. In einer hyperquantisierten Theorie wird aber der Unterschied zwischen

Feldern und Teilchen stark verwischt, und es ist deshalb durchaus nicht trivial zu erfragen, ob die Existenz starker Erhaltungssätze noch von Interesse ist. Dies scheint insofern der Fall zu sein, als starke Erhaltungssätze einige Zuversicht geben, daß auch unvollständige Theorien zu teilweise richtigen Ergebnissen führen können. Da niemand ernsthaft glaubt, daß irgendeine gegenwärtig bekannte Theorie alle Naturkräfte vollständig enthält, ist dies ein wichtiger Gesichtspunkt.

Genauer möchte ich die Sache so ausdrücken. Normalerweise wird der in einem Raumgebiet enthaltene Impuls durch ein Volumenintegral der Impulsdichte beschrieben. Angenommen, ich kenne die äußeren Kräfte, aber nicht die innere Struktur des Gebiets, so hilft es mir wenig, daß ich die Gesamtänderung des im Gebiet enthaltenen Impulses zu bestimmen weiß. Ich muß doch immer damit rechnen, daß das Innere mir unbekannte Beiträge zum Impuls liefert, so daß ich nichts über die Änderung an der mir zugänglichen Oberfläche sagen kann. Habe ich dagegen einen starken Erhaltungssatz, so kann ich den Gesamtimpuls durch ein Oberflächenintegral darstellen. Schließt die Oberfläche also in ihrem Innern mir unbekannte und unzugängliche Kraftfelder ein, hat mit anderen Worten ein physikalisches System eine mir unbekannte Innenstruktur (virtuelle Mesonen aller Art), so kann ich dennoch mit einer unvollständigen Erfassung dieser inneren Zusammenhänge Aussagen über das Verhalten des Gesamtgebildes machen, wenn ich nur die an der Oberfläche erscheinenden Kraftfelder richtig beherrsche. Meines Erachtens besteht durchaus die Möglichkeit, daß die starken Erhaltungssätze etwas mit Renormalisierbarkeit zu tun haben.

In diesem Zusammenhang möchte ich auch noch erwähnen, daß etwaige andere Transformationsgruppen, die von willkürlichen Funktionen abhängen, im allgemeinen ihre eigenen starken Erhaltungssätze liefern werden. Vielleicht wird es später möglich sein, diese mathematischen Methoden auf die isotope Spingruppe und ähnliche Invarianzeigenschaften anzuwenden.

Hiermit habe ich, glaube ich, alles Wesentliche berichtet. Auf die Frage, ob ich das Gravitationsfeld quantisieren kann, muß ich leider noch immer mit einem „Noch nicht“ antworten. Aber auf die Frage, ob es überhaupt möglich ist, denke ich, kann man ehrlich sagen: „Höchstwahrscheinlich ja“.

Diskussion – Discussion

F. A. E. Pirani: I should like to point out a way of defining invariants, essentially due to Kretschmann (1917), which is simpler than that attributed to Komar: Define

$$g_{\mu\nu\varrho\sigma} = g_{\mu\varrho}\, g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\varrho}$$

$$\eta_{\mu\nu\varrho\sigma} = (-g)^{-1/2}\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$$

where $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$ is the alternating tensor. Then the solutions λ of the equations

$$(R_{\mu\nu\varrho\sigma} - \lambda\, g_{\mu\nu\varrho\sigma})\, p^{\varrho\sigma} = 0$$

$$(R_{\mu\nu\varrho\sigma} - \lambda\, \eta_{\mu\nu\varrho\sigma})\, q^{\varrho\sigma} = 0$$

(where $p^{\varrho\sigma}$ and $q^{\varrho\sigma}$ are skew eigentensors) are a system of invariants. The theory of these equations has been studied extensively by Ruse.

A. Lichnerowicz: Il conviendrait de compléter cette théorie par une étude du problème de Cauchy destinée à montrer que, si les conditions de contraintes sont satisfaites sur l'hypersurface initiale, elles le sont au voisinage de cette hypersurface. L'analyticité ne peut être admise ici. Même si elle l'était, la solution pourrait être *instable* par rapport aux conditions initiales, comme le montre le cas de problèmes de Cauchy correspondant à des hypersurfaces orientées dans le temps.

M. Fierz: Die Fragen, die Herr Bergmann diskutiert hat, nämlich die Quantisierung der Gravitationstheorie, haben einen engen Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz von Gravitationswellen, über die Donnerstag Herr Rosen sprechen wird.

Wenn man in der ,,üblichen" Art quantisiert, so nimmt man an, daß beliebige Anfangsbedingungen – natürlich mit den Nebenbedingungen verträgliche – zugelassen werden dürfen. Solche Anfangsbedingungen führen aber unter Umständen zu einem singulären Verhalten des Gravitationsfeldes (Beispiel: Ebene Wellen). Wenn man auch das ausschließen will, werden vermutlich neue, zusätzliche Schwierigkeiten entstehen.

Literatur

[1] Einstein, A., Infeld, L., und Hoffmann, B., Ann. Math. *39*, 65 (1938).
[2] Einstein, A., and Infeld, L., Ann. Math. *41*, 455 (1940).
[3] Einstein, A., und Infeld, L., Can. J. Math. *1*, 209 (1949).
[4] Infeld, L., und Wallace, P. R., Phys. Rev. *57*, 797 (1940).
[5] Papapetrou, A., Phys. Soc. Proc. *64*, 57 (1951).
[6] Bergmann, P. G., Phys. Rev. *75*, 680 (1949).
[7] Goldberg, J. N., Phy. Rev. *89*, 263 (1953).
[8] Einstein, A., *The Meaning of Relativity* [Fourth Edition], Princeton University Press.
[9] De Broglie, L., Comptes Rendus *183*, 447 (1926), *184*, 273 (1927), *185*, 380 (1927).
[10] Bohm, D., Phys. Rev. *85*, 166, 180 (1952), *89*, 458 (1953).
[11] Bohm, D., Schiller, R., Tiomno, J., Nuovo Cimento *1*, 48, 67 (1955).

[12] WIENER, N., und SIEGEL, A., Phys. Rev. *91*, 1951 (1553).
[13] ROSENFELD, L., Ann. d. Physik *5*, 113 (1930).
[14] ROSENFELD, L., Ann. Inst. Henri Poincaré *2*, 25 (1932).
[15] HELLER, J., Phys. Rev. *81*, 946 (1951).
[16] SCHILD, A., und PIRANI, F., Phys. Rev. *79*, 986 (1950).
[17] BERGMANN, P. G., PENFIELD, R., SCHILLER, R., und ZATZKIS, H., Phys. Rev. *80*, 81 (1950).
[18] ANDERSON, J. L., und BERGMANN, P. G., Phys. Rev. *83*, 1018 (1951).
[19] PENFIELD, R., Phys. Rev. *84*, 737 (1951).
[20] DIRAC, P. A. M., Can. J. Math. *2*, 129 (1950), *3*, 1 (1951).
[21] BERGMANN, P. G., und BRUNINGS, J. H. M., Revs. Mod. Phys. *21*, 480 (1949).
[22] BERGMANN, P. G., and GOLDBERG, I., Phys. Rev. *98*, 531 (1955).
[23] BERGMANN, P. G., Phys. Rev. *98*, 544 (1955).
[24] BERGMANN, P. G., Interntl. Conf. Element. Part. Pisa (1955).
[25] KOMAR, A., Phys. Rev. *99*, 662 (A) (1955)
[26] PAULI, W., and FIERZ, M., Helv. Phys. Acta. *12*, 297 (1939).
[27] NEWMAN, E., private Mitteilung.
[28] DE WITT, B. S., private Mitteilung.
[29] FEYNMAN, R. P., Revs. Mod. Phys. *20*, 367 (1948).
[30] SCHWINGER, J., Phys. Rev. *82*, 914 (1951).
[31] PEIERLS, R. E., Roy. Soc. London Proc. [A] *214*, 143 (1952).
[32] BERGMANN, P. G., and SCHILLER, R., Phys. Rev. *89*, 4 (1953).
[33] JANIS, A., private Mitteilung.
[34] SCHRÖDINGER, E., Berl. Ber. *1932*, 105.
[35] BARGMANN, V., Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber. *25*, 346 (1932).
[36] INFELD, L., und VAN DER WAERDEN, B. L., Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber. *9*, 380 (1933).
[37] SCHOUTEN, J. A., J. Phys. Math. *1933*, 331.
[38] PAULI, W., Ann. d. Physik *18*, 337 (1933).
[39] HELLER, J., und BERGMANN, P. G., Phys. Rev. *84*, 665 (1951).
[40] BERGMANN, P. G., and THOMSON, R., Phys. Rev. *89*, 400 (1953).

The electromagnetic Field due to a Uniformly Accelerated Charge, with Special Reference to the Case of Gravitational Acceleration

by H. BONDI (London)

No manuscript has been submited to the editors. See the paper by H. BONDI and T. GOLD in the Proceedings of the Royal Society, A. Vol. 229, pp. 416–424, 1955.

Diskussion – Discussion

W. H. McCREA: In view of the consistency that Prof. BONDI finds between his result and the principle of equivalence, it would be interesting to know if the force-system acting upon the charged particle including the radiative reaction, also leads to a consistent result.

H. BONDI: We have not investigated the radiative reaction. However, since the radiative part of the field is unchanged in the course of tirne, the radiative reaction presumably vanishes.

Complémentarité et relativité

par O. Costa de Beauregard (Paris)

Les exposés traditionnels de la doctrine de la complémentarité ne mettent pas en claire évidence l'extrême harmonie préétablie qu'il y a entre elle et la théorie de la Relativité restreinte. En d'autres termes, la doctrine de la Complémentarité de Bohr, taillée „sur mesures" pour le formalisme quantique, a souffert de n'être pas exposée d'emblée en termes covariants minkowskiens, et aussi en termes de la théorie superquantifiée, sa contemporaine. Nous voulons ici remédier à ces deux lacunes.

Comme y a insisté von Neumann, toute mesure quantique est l'ensemble d'une question et d'une réponse.

La question est définie au moyen d'un appareil macroscopique qui, du fait de sa lourdeur, est un objet parfaitement „déterminé" en positions et en vitesses. Dans le cas général, cet appareil sera en évolution (ses diaphragmes s'ouvrent et se ferment, le collimateur ou le canon à électrons s'allume et s'éteint, etc....); ce sera alors un objet bien déterminé au sens 4-dimensionnel de Minkowski.

Cet appareil d'espace-temps sous-tend un certain système orthogonal complet d'ondes d'espace-temps (dans notre précédente communication, nous avons défini cette notion de manière covariante relativiste). Ces ondes covariantes relativistes forment une collection d'objets (abstraits) de l'espace-temps; elles vont jouer le même rôle que les collections d'urnes des exposés élémentaires du calcul des probabilités. Leur ensemble caractérise la question posée à la Nature par l'appareil macroscopique.

La réponse à la question posée consiste en une collection de nombres d'occupation des précédentes ondes. Ces nombres sont, eux aussi, des covariants relativistes et quantiques: leurs valeurs sont unanimément reconnues par les „observateurs" relativistes et les „expérimentateurs" quantiques. Dans le cas limite classique, il faut faire *correspondre*, au sens de Bohr, à chaque onde précédente un tube d'Univers du genre temps (l'intérieur d'un cône isotrope dans le cas d'une onde $D(x-x_0)$, un quasi-cylindre dans le cas d'une onde plane monochromatique estompée aux grandes distances transversales); le nombre d'occupation de chaque onde

correspond au nombre de trajectoires „cachées“ dans chaque tube.

Si le nombre d'occupation d'une onde est nul, on risque des malentendus en disant que l'onde est supprimée, ou effacée, par l'épreuve au résultat „négatif“; mieux vaut dire que l'onde est inoccupée ou vide, exactement comme on le dit d'une urne. Phénoménologiquement, le corpuscule n'est *rien de plus* que le nombre d'occupation de la solution d'un certain type d'équation. Si le corpuscule apparait quasi-ponctuel dans certaines expériences (trajectoires à la chambre de WILSON, impact sur un écran fluorescent ou une plaque photographique), c'est là une propriété non du corpuscule, *mais du récepteur*, qui est du type „mosaïque“ ou „échiquier“, formé de cellules *indépendantes*.

L'on n'a pas plus le droit de dire qu'un corpuscule «a» une position ou une impulsion, qu'on ne doit attribuer à la personne du mannequin d'une maison de couture la robe, ou tel détail de la robe qu'elle présente. *Toute* mesure quantique *est onde* en tant que *question*, *nombre d'occupation* de cette onde en tant que *réponse*. La dualité entre onde et corpuscule est une notion ambiguë et fallacieuse sous la forme qu'elle a eue initialement; la notion correcte est la dualité entre phase et nombre d'occupation (qu'on peut démontrer sur un seul corpuscule, donc aussi bien avec un *fermion* qu'avec un *boson*); dans la célèbre expérience de pensée des trous d'YOUNG, on ne peut pas connaître à la fois la différence de phase et les nombres d'occupation des deux ondes quasi-sphériques.

Ces remarques éclairent vivement la discussion fameuse entre EINSTEIN et BOHR. EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN avaient insisté sur la nécessaire *objectivité* du nombre d'occupation d'une onde, tandis que BOHR, dans sa réponse, maintenait le caractère *arbitraire* d'un changement de programme de mesures et *aléatoire* de la distribution des nouveaux nombres d'occupation. *Les deux exigences sont compatibles.* Le battage d'un jeu de cartes offre un exemple d'un phénomène à la fois *objectif* et *aléatoire*, avec même une matrice de transition symétrique (comme en théorie quantique) si le geste du batteur de cartes est temporellement symétrique.

Bibliographie

[1] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., and ROSEN, N., Physical Review *47*, 777, (1935).
[2] BOHR, N., Physical Review *48*, 696, (1935).
[3] COSTA DE BEAUREGARD, O., Revue générale des sciences *62*, 261 (1955) Revue philosophique, 385 (1955).

Les quatorze invariants de courbure de l'espace riemannien à quatre dimensions

par J. GÉHÉNIAU et R. DEBEVER
(Université libre de Bruxelles)

1. Un invariant de courbure de l'espace riemannien est une fonction du tenseur métrique g_{rs} et de ses dérivées premières et secondes par rapport aux variables x^u, de forme invariante pour les changements «quelconques» des coordonnées x^u. Le but de cette communication est de donner des expressions des quatorze invariants de courbure distincts de l'espace riemannien à quatre dimensions, principalement du point de vue algébrique.

2. Ces invariants ne dépendent que du tenseur métrique et du tenseur de RIEMANN R_{pqrs} [1]. Introduisons les notations

$$R_{pr} = R^s_{psr}\,, \quad R = R^p_p \tag{1}$$

$$g_{pqrs} = g_{pr}\,g_{qs} - g_{ps}\,g_{qr} \tag{2}$$

$$S_{pqrs} = R_{pqrs} - \frac{1}{12}\,R g_{pqrs} \tag{3}$$

$$S_{pr} = S^s_{psr} = R_{pr} - \frac{1}{4}\,R g_{pr} \tag{4}$$

$$2e_{pqrs} = g_{pr}\,S_{qs} - g_{ps}\,S_{qr} - g_{qr}\,S_{ps} + g_{qs}\,S_{pr} \tag{5}$$

$$C_{pqrs} = S_{pqrs} - e_{pqrs} \tag{6}$$

Ce dernier tenseur est le tenseur de WEYL; on a

$$C^s_{psr} = 0\,. \tag{7}$$

On peut vérifier facilement que les tenseurs $\mathrm{R}g_{pqrs}$, e_{pqrs} et C_{pqrs} sont formés par des combinaisons linéairement indépendantes des composantes du tenseur de RIEMANN.

3. Le seul invariant fonction linéaire des R_{pqrs} est R. On en obtient trois autres en développant le déterminant

$$dét\ (S_p^q - \lambda\delta_p^q) \tag{8}$$

par rapport aux puissances de λ. Ils sont respectivement du deuxième, troisième et quatrième degré en les R_{qprs}. Avec R ils fournissent les quatre invariants distincts associés aux deux tenseurs R_{pq} et g_{pq}.

4. Avec le tenseur de Weyl, on peut former quatre invariants évidemment distincts des précédents. Pour les écrire nous utiliserons les tenseurs

$$\overline{C}_{pq}^{rs} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} C_{pq\overline{rs}}$$

$$^{\pm}C_{pq}^{rs} = C_{pq}^{rs} \pm \overline{C}_{pq}^{rs}$$

où g est le déterminant des g_{rs} et $\overline{rs}$ est mis pour les deux chiffres qui forment avec rs une permutation paire de 1, 2, 3, 4.

Ces invariants sont les coefficients de λ^4 et de λ^3 des deux polynômes en λ

$$dét\ (^{\pm}C_{pq}^{rs} - \lambda\, \delta_{pq}^{rs}) \tag{9}$$

où $\delta_{pq}^{rs} = \delta_p^r\, \delta_q^s - \delta_p^s\, \delta_q^r$. Nous ne les écrirons plus explicitement ici que dans le cas des espaces de Riemann à forme définie positive. On peut alors choisir en un point le système de coordonnées de manière que

$$g_{rs} = \delta_{rs}, \tag{10}$$

et, en considérant les C_{pqrs} comme les éléments d'une matrice à six lignes ($pq = 23, 31, 12, 14, 24, 34$) et six colonnes, on a

$$^{+}C = \begin{pmatrix} ^{+}A & ^{+}A \\ ^{+}A & ^{+}A \end{pmatrix} \qquad ^{-}C = \begin{pmatrix} ^{-}A & -^{-}A \\ -^{-}A & ^{-}A \end{pmatrix} \tag{11}$$

où $^{\pm}A$ sont deux matrices carrées indépendantes à trois lignes, symétriques et de traces nulles. On voit ainsi que les seuls invariants distincts donnés par (9) sont les coefficients de λ et de λ^0 des polynômes

$$dét\ (^{\pm}A - \lambda I) \tag{12}$$

où I est la matrice unité.

5. Deux nouveaux invariants sont obtenus de la même manière qu'au § 4, à partir du tenseur

$$D_{pqrs} = e_{pquv}\, C^{uv}_{rs}\,; \tag{13}$$

ce sont les coefficients de λ^4 et λ^2 dans le polynôme en λ

$$\textit{dét}\,(D^{rs}_{pq} - \lambda\, \delta^{rs}_{pq}) \tag{14}$$

ou encore, en utilisant (10), les coefficients de λ^4 et λ^2 dans le polynôme en λ

$$\textit{dét}\begin{pmatrix} -\lambda I & {}^{-}s\,{}^{-}A \\ {}^{+}s\,{}^{+}A & -\lambda I \end{pmatrix} \tag{15}$$

où

$$\begin{gathered} {}^{\pm}s = s_1 \pm s_2 \\ (s_1)_{\alpha\beta} = - S_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} S, \quad S = S_{11} + S_{22} + S_{33} \\ (s_2)_{23} = S_{14}, \quad (s_2)_{31} = S_{24}, \quad (s_2)_{12} = S_{34}. \end{gathered} \tag{16}$$

6. Les quatre derniers invariants s'obtiennent par la même méthode, à partir du tenseur

$$E_{pqrs} = e_{pquv}\, C^{uvmn}\, e_{mnrs}\,. \tag{17}$$

Ce sont les coefficients de λ^5 et de λ^4 des polynômes en λ

$$\textit{dét}\,({}^{\pm}E^{rs}_{pq} - \lambda\, \delta^{rs}_{pq}) \tag{18}$$

ou encore, en utilisant (10), les coefficients de λ^2 et de λ des polynômes en λ

$$\textit{dét}\,({}^{\pm}s\;{}^{\pm}A\;{}^{\pm}s - \lambda I) \tag{19}$$

7. A l'aide de (12), (15) et (19) on démontre aisément que les invariants de courbure indiqués sont distincts. En résumé, nous avons écrit les quatorze invariants sous la forme de polynômes en les composantes du tenseur de Riemann.

Diskussion – Discussion

L. Infeld: How do you know that these are all the invariants?

J. Géhéniau: Je ne puis qu'esquisser la démonstration du théorème qui se trouve dans les travaux que je viens de citer. On effectue une trans-

formation infinitésimale des coordonnées $\delta x^r = \xi^r(x)$. On calcule les transformations infinitésimales du tenseur g_{rs} et de ses dérivées premières et secondes; elles dépendent linéairement des dérivées premières, secondes et troisièmes des ξ^r. On exprime que la variation δI d'un invariant doit être nulle quels que soient les ξ^r et leurs dérivées. Il en résulte un nombre d'équations égal au nombre de fonctions $\partial\xi^r/\partial x^s$, $\partial^2\xi^r/\partial x^s\,\partial x^u$, $\partial^3\xi^r/\partial x^s\,\partial x^u\,\partial x^t$. On démontre que, pour $n > 2$, ces équations sont distinctes et forment un système complet. Le nombre d'invariants distincts est alors égal à la différence entre le nombre de fonctions g_{rs}, $\partial g_{rs}/\partial x^u$, $\partial^2 g_{rs}/\partial x^u\,\partial x^t$ et ce nombre d'équations.

M. LUCINI: Existe-t-il un rapport général entre le nombre de dimensions d'un espace de RIEMANN et celui d'invariants de courbure?

J. GÉHÉNIAU: Il existe une formule qui donne le nombre N d'invariants de courbure distincts en fonction du nombre n de dimensions de l'espace. Cette formule a été donnée pour la première fois, je pense, par S. LIE, puis par M. DE DONDER dans des cas plus généraux, et HASKING a publié un travail fort important sur ce sujet, il y a une cinquantaine d'années. Il y a bien d'autres travaux sur cette question; l'historique en sera faite dans un exposé plus développé [2]. La formule demandée est $N = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$ pour $n > 2$.

MME. A. TONNELAT: Peut-on donner explicitement les invariants dans le cas où les g_{ik} ne sont pas symétriques?

J. GÉHÉNIAU: Le raisonnement qui fournit le nombre d'invariants de courbure distincts est applicable au cas des g_{ik} non symétriques. Nous n'avons pas essayé d'étendre nos calculs à ce cas, mais cela me parait possible.

Anschließend an eine Bemerkung von P. G. BERGMANN entstand eine Diskussion, deren Resultat von P. G. BERGMANN und E. P. WIGNER folgendermaßen formuliert wurde.

Die Frage, die entschieden werden sollte (und die auch Herr KOMAR in Princeton angegriffen hatte) betraf die Charakterisierung wesentlich verschiedener Lösungen der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen. Zwei Lösungen der Gravitationsgleichungen werden als wesentlich *identisch* angesehen, wenn eine ein-eindeutige Zuordnung der Punkte P und P' der zugehörigen RIEMANNschen Räume existiert, die längentreu ist, d. h. so beschaffen, daß wenn P_1 und P_2 zwei benachbarte Punkte des ersten Raumes und P_1' und P_2' die zugehörigen Punkte des zweiten Raumes sind, der Abstand P_1P_2 im ersten Raum gleich dem Abstand $P_1'P_2'$ des zweiten Raumes ist. Wenn eine derartige Zuordnung der Punkte der beiden Räume nicht hergestellt werden kann, gelten sie als wesentlich verschieden.

Falls eine Zuordnung der angegebenen Art zwischen zwei RIEMANNschen Räumen existiert, werden die Werte, die die Invarianten im ersten Raum in einem Punkte P annehmen, den Werten, die dieselben Invarianten im zugeordneten Punkt P' im zweiten Raum annehmen, gleich sein. Wie schon Herr KOMAR beobachtet hat, ermöglicht dies das Auffinden zugeordneter Punkte in den zu vergleichenden RIEMANNschen Räumen. Wenn man vier Invarianten als Koordinaten einführt, so werden die Koordinaten von Punkten, die einander zugeordnet sind, gleich sein. Um zwei RIEMANNsche Räume zu vergleichen, die beide die Gravitationsgleichungen erfüllen, kann man daher in beiden die vier nichtverschwindenden Invarianten von GÉHÉNIAU und DEBEVER als Koordinaten einführen. Falls dies möglich ist, wird sich die wesentliche Verschiedenheit zweier Lösungen der Gravitationsgleichungen in der Verschiedenheit der Werte weiterer Invarianten äußern, wenn diese als Funktionen der vorerwähnten vier Invarianten ausgedrückt werden. Die Untersuchung der Herren GÉHÉNIAU und DEBEVER lehrt uns, daß diese weiteren Invarianten auch höhere als zweite Differentialquotienten der g_{ik} enthalten müssen.

Bibliographie

[1] HASKING, Trans. of the Am. Soc., *3*, 71 (1902).
[2] J. GÉHÉNIAU et R. DEBEVER, Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. des Sc., XLII, 114 (1956).
J. GÉHÉNIAU, Id., 252 (1956).
R. DEBEVER, Id., 313 et 608 (1956).

Observational Results on the Light Deflection and on Red-shift in Star Spectra

by Robert J. Trumpler
(University of California, Berkeley)

1. Light Deflection

The generalized Theory of Relativity published by Einstein in 1916 predicted that light rays passing close to the sun are slightly curved on account of the sun's gravitational field. A star when seen at a small angular distance from the sun should thus appear to the observer somewhat shifted from its true position. This shift is

a) in the direction away from the sun's center

b) by an angle inversely proportional to the angular distance from the sun's center,

c) the amount at the sun's edge being $1''75$.

A similar shift of star positions had been predicted by Soldner in 1801 on the basis of Newtons corpuscular theory of light; but the amount of deflection by this theory is only half as much as required by Einsteins theory. According to the classical wave theory of light, however, no deflection was to be expected.

The observational test concerning the existence and amount of light deflection can be made only during total solar eclipses when the scattered sky light is sufficiently reduced to observe stars near the sun. The usual procedure is to take a photograph of the stars surrounding the eclipsed sun and to compare this photograph with a similar photograph of the same stars taken several months before or after the eclipse when the sun is in a different part of the celestial sphere. The second photograph shows the normal positions of the stars.

When coordinates of stars are measured on a photograph and compared with those measured on another photograph, allowance must be made for a difference in the zero point and orientation of the coordinate systems and for a difference in the scale of the plates due to temperature changes or other causes. In our problem, the first two adjustments are easily made

if the eclipsed sun is near the center of the plate, and if the stars are symmetrically distributed around it. A difference in the scale of the plates, however, produces an apparent shift in star positions toward or away from the center, and the shift due to scale becomes mixed up with the relativity shift to be determined.

Absolute measures of the light deflection require a direct determination of the scale change between the eclipse photograph and the comparison photograph taken at night several months earlier or later. Since an accuracy of at least 1 part in 10^5 is required this is a very difficult problem particularly under the conditions of a temporary eclipse station.

If, as usual, the eclipsed sun is situated at the center of the plate, the effect of the scale change is directly proportional to the distance from the center, whereas the relativity shift is inversely proportional to this distance. The measured displacement l of each star thus furnishes an equation of condition

$$\frac{1}{r}E + rS = l,$$

where r is the known angular distance of the star from the sun's center measured in units of the sun's radius. Provided the observed stars cover a sufficient range in r, it is possible to determine both the light deflection constant E as well as the scale constant S from the star measures by a least squares solution. We shall designate light deflections derived by this method as *relative*.

In the relative method, used by most of the earlier investigators, the numerous stars near the edge of the plate contribute mainly to the determination of the scale constant; the light deflection constant is essentially based on the relatively few stars near the eclipsed sun. On account of the brightness of the inner corona it is very rarely possible to photograph stars that are less than one solar radius from the sun's edge with deflections of more than $0''9$. The successful application of the relative method thus requires not only measures of highest accuracy, it requires also that the observations cover a large field and extend to a considerable angular distance from the sun; otherwise the light deflection and the scale change cannot be well separated. Both of these requirements can be met by the use of large plates (16–18 inches or 40–45 cm square) and of specially designed triple or quadruple objectives. By means of such wide angle photographs, the Lick Observatory expedition of 1922 was able to test the law of inverse proportionality over the range from 2 to 40 solar radii.

The first attempt to measure absolute values of light deflections was made in 1929 by an expedition of the Potsdam observatory. A reseau was

copied by projection on the eclipse photograph as well as on the later night photographs of the same star field. There is, however, some doubt as to whether the reseau copies can by relied upon for the determination of the scale change. If the scale determination by the reseau is rejected, and if the measures are reduced by the relative method, the results are in good agreement with the theory.

Another method for determining absolute values of the light deflections was successfully used by VAN BIESBROECK at the eclipse of Febr. 15, 1952 in Khartoum. By means of a half transparent mirror in front of the objective he was able to photograph simultaneously the star field around the eclipsed sun as well as an auxiliary star field 90° from the sun. These two star fields were again photographed six months later. The auxiliary star field which at both times was unaffected by light deflection served to determine the scale change.

Table 1 gives the results for the light deflection at the sun's limb derived by the eclipse expeditions to date. If one considers the various instruments and methods used and the many observers involved, the conclusion seems justified that the observations on the whole confirm the theory.

Table 1. Observations of Light Deflection

Eclipse	Station	Focal lenght	No plates	No stars	Method	Light Deflection at Sun's Limb ″	p. e. ″	Observers
1919 May 29	Sobral	19 feet	7	7	relat.	1·98	±·12	DYSON
	Sobral	11	16	6–12	relat.	(0·86)	±·1	DAVIDSON
	Principe	18	2	5	relat.	1·61	±·3	EDDINGTON
1922 Sept 21	Wallal	15	4	62–85	relat.	1·72	±·11	CAMPBELL
		5	6	134–143	relat.	1·82	±·15	TRUMPLER
	Wallal	10	2	18	relat.	1·74	±·3	CHANT, YOUNG
	Cordillo Downs	5	2	14	relat.	1·77	±·3	DAVIDSON DODWELL
1929 May 9	Takengon	28	4	17–18	absol.	(2·24)		FREUNDLICH
					relat.	1·75	±·13	v. KLÜBER v. BRUNN
1947 May 20	Bocaiuva	20	1	51	relat.	2·01	±·18	v. BIESBROEK
1952 Febr 25	Khartoum	20	2	9–11	absol.	1·70	±·07	v. BIESBROEK

Prediction by Relativity Theory 1·75

2. Red-Shift of Spectral lines

The red-shift of spectral lines due to the gravitational potential at the surface of the sun is small (corresponding to a DOPPLER shift of about 0·6 km/sec). Measures of the solar spectrum at the Mt. Wilson observatory by ST. JOHN did suggest an average red-shift of this order. The discrepancies of various groups of lines and in different parts of the solar surface, however, are considerable, and the confirmation of the theory by the solar observations is not very convincing.

Progress in the study of the constitution of stars, however, has drawn attention to certain cases among the stars where a much larger red-shift may be expected. The gravitational potential at the surface of a star is proportional to M/R, where M is the mass of the star, and R its radius (in units of the sun's mass and radius). There are essentially two classes of stars where M/R becomes large:

a) The so-called white dwarfs, stars of normal mass, but very small radius ($M \sim 1$–2, $R \sim 1/50$).

b) Stars of very large mass and moderate radius. If such stars exists, they must be found among the stars of greatest luminosity and highest temperature.

The main difficulty in determining a gravitational red-shift of spectral lines in stars is to separate the red-shift from the DOPPLER shift due to the motion of the star relative to the solar system.

The companion of Sirius e. g. is a white dwarf which together with Sirius forms a double star system of well determined orbital motion. When the shift of spectral lines is measured both for Sirius and its companion, and when allowance is made for the orbital motion, the white dwarf companion shows a red-shift equivalent to a velocity of 19 km/sec. In this case the mass and radius of the white dwarf are fairly well known, and the red-shift calculated by theory (20 km/sec) is in good agreement with the observed value.

The binary star 40 Eridani also has a companion which is a white dwarf. Its red-shift has recently been measured by D. POPPER at the Mt. Wilson Observatory.

The result $+ 21 \pm 4$ km/sec is very similar to that of the companion of Sirius and is sufficiently close to the theoretical value $+ 17 \pm 3$ km/sec calculated from the mass and radius of the star.

For more than 30 years I have been working on a program of measuring the radial velocities (Doppler shift) of stars in galactic star clusters. The internal motions of stars in such a cluster are usually small, and the physical members of the cluster have nearly the same motion relative to the sun. About 20 years ago I drew attention to the high temperature stars (spectral type 0) of great luminosity contained in many of the

clusters. These stars show an appreciable red-shift of spectral lines as compared with the fainter more normal stars of the same cluster, and I suggested that this red-shift is, on the average, probably a relativity red-shift. These stars may have masses of the order of 100 solar masses and radii about 4–5 time that of the sun. The gravitational red-shift would thus be about 20 times greater than on the sun or near 10 km/sec which is about the average value observed.

The results which I have now available for 18 stars in 10 clusters are shown in Table 2. Three stars with emission lines (Wolf-Rayet) have been omitted, and for three stars the results are not yet completed. While many of the individual values are somewhat uncertain, the average should be fairly well established.

Table 2. Red-shift of *O*-type Stars in Star Clusters

Cluster	Star	M	Sp. T.	Red-Shift (km/sec)
J. C. 1805	2	—4·5	07	+ 12·4 ± 2·2 S. B.
	3	—4·2	07	+ 2·8 ± 2·0
J. C. 1848	1	—6·0	07	+ 10·4 ± 4·8 S. B.
	1 a	—4·4	08	+ 4·6 ± 5·4
	2	—4·9	09	+ 6·2 ± 3·5
NGC. 2244	9	—5·0	07	+ 6·8 ± 1·3
	15	—4·6	06	+ 13·6 ± 1·7
	8	—4·3	08	+ 6·4 ± 1·6
NGC. 2264	1	—4·6	07	+ 9·8 ± 1·2
NGC. 2353	1	—4·6	09	+ 16·1 ± 1·6 S. B.
NGC. 6231	50	—4·6	08	+ 16·4 ± 2·6
NGC. 6604	1	—6·0	08	+ 13·6 ± 4·1 Var. Vel.
NGC. 6611	1	—5·2	06	+ 9·0 ± 2·1
	2	—4·8	08	+ 4·1 ± 3·7 Var. Vel.
	3	—4·7	08	+ 9·9 ± 2·4
NGC. 6823	1	—4·3	08	+ 11·6 ± 3·4
	2	—4·0	09	+ 7·7 ± 3·6
NGC. 6871	5	—5·4	B0	+ 15·6 ± 1·6
18 stars in 10 clusters				+ 9·8 km/sec

Diskussion – Discussion

W. Baade: For which of the determinations of the light deflection (1922, 1929, 1952) was the star distribution the most favorable one, considering the differential method?

R. J. Trumpler: In the 1929 eclipse the star distribution was decidedly unsymmetrical. In the 1922 eclipse, the distribution was quite symmetrical, and I think the same is true for the 1952 eclipse.

E. Finlay-Freundlich: I would like to say a few words in order to stress the main points:

1) Dr. Trumpler should have mentioned that with regard to the eclipse 1922, when the observations were discussed according to the original plan the result was not 1″·72 but 2″·05, that means 2″·1 (even the tenth of a second is not yet safely established). Hence the result you would have obtained if you had not known Einstein's prediction would have been 2″·1.

2) As to the eclipse of 1919; the value 1″·98, i.e. 2″·0 was chosen as the most probable result. When, however, Eddington reduced his plates he did not take account of the higher order terms in the correction for refraction. Now any distortion of the field other than the relativistic has a very large influence upon the final result; hence the correction for refraction has to be applied with the utmost accuracy. Hopman, as a matter of fact, reduced the plates once more and obtained instead of 1″·98, 2″·16 – that means practically 2″·2.

3) Now with regard to the observations of the eclipse of 1952, reduced according to a method which Professor Trumpler called the absolute method, I must point out that this method is wrong. By using a plane-parallel plate which is partly used as a refracting component of the optical system partly as a reflecting component, one is using two completely different systems. One cannot consequently derive the scale correction by using the stars reflected from the plate and apply this correction to the stars which have passed through the plate.

This is proved by the very simple fact that when van Biesbroeck tried this method for the first time in 1947, the star images which had passed through the plate were measurably good, those stars which had been reflected were so bad that they could not be measured. Michelson has shown that reflecting optical systems have to be four times more accurately figured than refracting systems. Consequently this method may not be used; it is on principle wrong. The fact that in 1952 the star images in both star fields were good enough to be measured does not prove in any way that the scale correction obtained from the one field is accurate within one $10^{-5\,\text{th}}$ to $10^{-6\,\text{th}}$ of the focal length as it should be.

The results from 1952 have only an apparent accuracy; they are really systematically wrong.

Finally, as far as my own expedition of 1929 is concerned, I made a zero experiment parallel to every exposure on the eclipse field. The whole experiment was made double: one with the telescope pointed towards the star field surrounding the sun and one using a star field about 25 degrees away from the sun.

This second field was reduced similarly with exactly the same optics and gave, indeed, a zero distortion of the starfield. The average absolute difference in the positions of stars was $0''\cdot13$; that means it was practically zero, because the mean error of one observation is at least of the order of $0''\cdot2$.

To summarize: if the observations had been reduced without knowing the predicted theoretical value, astronomers would have obtained values for the light deflection near to $2''\cdot1$ and $2''\cdot2$. We have to decide what the observations yield and may not be influenced by the fact that the theory may ask for a different value.

The problem reads: what is the value of the *observed* light deflection?

With regard to the red shift of the sun the situation is the following: it is conclusive that the observed value in the centre of the sun is only about one-third of the predicted value. On principle it would be possible to account for the difference by assuming radial currents in the sun's atmosphere. But then when approaching the sun's limb, the value should converge towards the theoretical value of EINSTEIN, because at the limb the Doppler effects drop out and also pressure effects should become insignificant.

Actually the values go up at the limb to about twice the theoretically predicted value. This has been shown by a great amount of very careful observations by EVERSHED. Moreover, M. G. ADAM has also shown that the necessary current velocities required to compensate the difference between theory and observations are apparently not compatible with the model of the sun's atmosphere.

So actually the situation with regard to the experimental test of the general theory of relativity is by no means favourable.

A lot of work will have to be done before the astronomers really can say what is the value of the observed light deflection and whether the red-shift is in existence at all. It looks at present as if the red-shift we observe is something of a different character and not the relativistic shift.

R. J. TRUMPLER: Prof. FINLAY-FREUNDLICH makes the statement that by another reduction plan the 1922 eclipse observations give the result $2''\cdot05$. This statement is misleading in so far as the figure quoted is only a partial result based on four of the ten plates. If all observations of both instruments are treated according to this plan, the result is $1''\cdot9$ which still agrees with the theory within the permissible limits of observational error.

H. BONDI: I disagree very strongly with Prof. FINLAY-FREUNDLICH's view on the reduction of the observations. *Either* one wishes to check General Relativity and then one examines the deviation of the observations from the $1''\cdot75/r$ law *or* one approaches the observations with

an open mind and then one examines *all* likely laws depending on radius, angle, solar cycle, etc.... I regard it however as wholly unjustifiable to take, as FREUNDLICH does, half the answer of Relativity, taking the law to be of the $1/r$ type, but with an arbitrary coefficient. This is incompatible with the theory and is not suggested by any general considerations.

F. HOYLE: Although the values quoted for Sirius B are a classical measurement, their validity seems to me somewhat doubtful. The so-called theoretical value of the red-shift actually depends on an observation of the effective surface temperature. And the effective surface temperature obtained in the measurements seems open to objection since it leads to a quite implausible radius for Sirius B.

W. H. McCREA: I am sorry that Dr. ADAM is not here to describe her latest measurements of line-shifts which she has recently presented to the Royal Astronomical Society. She has measured the shifts for lines of various equivalent widths and, in the range concerned, she finds the departure from the EINSTEIN shift, on the whole, to decrease with increasing equivalent width. Now the lines of greatest equivalent width must in general be those formed nearest to the surface of the photosphere. Although I do not know if Dr. ADAM would agree with the interpretation, it seems to me that her work can therefore be taken as an indication that, the less the line-formation is influenced by the complications mentioned by Prof. FREUNDLICH, the more near the measured shift is to the EINSTEIN value.

Ein Weltmodell der Newtonschen Kosmologie mit Expansion und Rotation

von O. HECKMANN und E. SCHÜCKING (Hamburg-Bergedorf)

Es ist bekannt, daß man im Rahmen der NEWTONschen Mechanik eine Kosmologie aufbauen kann. Für den Fall inkohärenter, homogen verteilter Materie erhält man – solange es sich nicht in mathematischer Hinsicht etwa um topologische und in physikalischer nicht etwa um optische Erscheinungen handelt – in der NEWTONschen Kosmologie sogar weitgehend mit der relativistischen Kosmologie übereinstimmende Resultate.

Das im folgenden mitgeteilte Weltmodell ist ganz mit klassischen Mitteln aufgebaut. Sein relativistisches Analogon ist bisher in der Literatur nicht bekannt geworden; es müßte eine Überlagerung der von GÖDEL behandelten starren Rotation mit einer allgemeinen Expansion enthalten. Unsere Grundlage bilden die Gleichungen der Newtonschen Mechanik kontinuierlicher Medien in kartesischen Koordinaten:

$$\varrho_{|0} + (\varrho\, v_k)_{|k} = 0\,, \tag{1}$$

$$v_{i|0} + v_k\, v_{i|k} = -\Phi_{|i} - \frac{1}{\varrho}\, P_{|i}\,, \tag{2}$$

$$\Phi_{|i|i} + \Lambda = 4\,\pi\, G\, \varrho\,. \tag{3}$$

Hier ist ϱ die Dichte, v_i der Strömungsvektor, P der Druck der Materie. Φ ist das Potential der Gravitationskräfte, G die Gravitationskonstante. Das Λ-Glied in der Poissonschen Gleichung (3) kann man nach Belieben fortlassen. Die Indizes laufen von 1 bis 3. $|_0$ bedeutet Ableitung nach der Zeit t; $|_i$ Ableitung nach x_i.

Macht man den Ansatz

$$\varrho = \varrho(t)\ ;\ P = P(t)\ ;\ v_i = a_{ik}(t)\, x_k\,, \tag{4}$$

so fordert man Homogenität und Isotropie von Dichte und Druck. Das von den Koordinaten linear abhängige Strömungsfeld hat die allgemeinste

Form, für die irgend zwei voneinander verschiedene mitschwimmende Beobachter vom Strömungsfeld ihrer Umgebung der gleichen Anblick haben.

Die Spezialisierung

$$a_{ik} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\,\delta_{ik}\,,$$

also isotrope Expansion mit dem zeitabhängigen Skalenfaktor $R(t)$ ($\dot{R}(t) = dR/dt$) führt auf die auch in der relativistischen Kosmologie behandelten Modelle, während $a_{ik} + a_{ki} = 0$ auf das klassische Analogon des GÖDELschen Modells führt.

Setzt man aber

$$a_{ik} = \frac{\dot{R}}{R}\,\delta_{ik} + \underset{\smile}{a_{ik}}; \quad \underset{\smile}{a_{ik}} + \underset{\smile}{a_{ki}} = 0\,,$$

so folgt zunächst wie im isotropen Falle die Erhaltung der Masse

$$\frac{4\pi}{3}\,\varrho\, R^3 = \mathfrak{M} = \text{const.} \tag{5}$$

Sodann folgt die Erhaltung der Drehimpulsdichte in der Form

$$\underset{\smile}{a_{ik}} = \frac{\alpha_{ik}}{R^2}\,; \quad \alpha_{ik} = -\alpha_{ki} = \text{const.} \tag{6}$$

Und endlich ergibt sich für R die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\,\dot{R}^2 = \frac{G\,\mathfrak{M}}{R} + \frac{\Lambda}{6}\,R^2 - \frac{\alpha_{ik}\,\alpha_{ik}}{6\,R^2} + h\,. \tag{7}$$

Links steht die Dichte der kinetischen Energie der Expansion, rechts 1. die Dichte der negativen potentiellen Energie der Gravitationskräfte, 2. die Dichte der potentiellen Energie der im (bekanntlich sehr problematischen) Λ-Glied zum Ausdruck kommenden universellen Kräfte, 3. die negative Dichte der kinetischen Energie der Rotation und 4. die positive, verschwindende oder negative Dichte der Gesamtenergie. In isotropen relativistischen Modellen würde dieser letzte Term eine die Raumkrümmung charakterisierende Konstante bedeuten. Während nun in den bisher bekanntgewordenen Modellen ($\alpha_{ik} = 0$) immer die Möglichkeit besteht, daß zu einer endlichen Zeit t_0 $R(t_0) = 0$; $\dot{R}(t_0) = \infty$; $\varrho = \infty$ wird, die Materie also aus unendlicher Konzentration mit unendlicher Geschwindigkeit ihre Expansion beginnt, sieht man aus (7) leicht, daß R bei noch so kleinen $\alpha_{ik} \neq 0$ überhaupt nicht mehr gleich Null werden kann, daß man also die Dichte des Urbreis im Moment des Urknalls durch die Überlagerung einer Rotation regulieren kann. Die nicht verschwindende Drehimpulsdichte verhindert also eine beliebige Konzentration der Materie.

Rotverschiebung und Bewegungsgleichungen

von A. Papapetrou (Berlin)

Wie zuerst Einstein und Grommer bewiesen haben, folgen in der allgemeinen Relativitätstheorie die Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen. Dieses Ergebnis ist nicht nur rein theoretisch wichtig, sondern auch für die experimentellen Bestätigungen der Theorie von Bedeutung. Man überlege sich nämlich, daß von den drei durch die allgemeine Relativitätstheorie vorausgesagten neuen Effekten – Periheldrehung, Lichtablenkung und Rotverschiebung – die zwei ersten sich auf reine Bewegungsvorgänge beziehen. Während also diese beiden Effekte ursprünglich aus dem damals unabhängig von den Feldgleichungen postulierten geodätischen Bewegungsgesetz abgeleitet waren, wissen wir heute, daß sie eine unmittelbare Folge der Feldgleichungen der Theorie sind.

Die Rotverschiebung konnte man bisher, soweit mir bekannt, nicht in ähnlicher Weise auf die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie zurückführen. Wir besitzen lediglich die ursprüngliche Einsteinsche Ableitung, welche aber von einer speziell dafür eingeführten Hypothese Gebrauch macht. Der Inhalt dieser Hypothese tritt besonders klar hervor, wenn man sie in folgende zwei Teile zerlegt: 1. Es gibt Uhren, welche durch die Eigenschaft charakterisiert sind, daß ihre Eigenperiode unverändert bleibt, wenn man sie an verschiedene Orte innerhalb eines Gravitationsfeldes bringt. Solche Uhren seien als Normaluhren bezeichnet. 2. Die Atome sind Normaluhren.

Ähnlich wie das geodätische Axiom zeichnet sich auch die Normaluhr-Hypothese durch hohe Eleganz und Leistungsfähigkeit aus. Während aber das geodätische Bewegungsgesetz aus dem geometrischen Inhalt der allgemeinen Relativitätstheorie zwangsläufig folgt, kann die Normaluhr-Hypothese offensichtlich nicht für alle Arten von Uhren gelten. Man denke z. B. an eine Pendeluhr, welche sich ganz anders als eine Normaluhr verhält: Die Periode der Normaluhr hängt vom Wert des Gravitationspotentials, die der Pendeluhr dagegen von den Werten der Ableitungen dieses Potentials ab.

In der Literatur findet man oft den Versuch einer Rechtfertigung der Normaluhr-Hypothese mit Hilfe des Äquivalenzprinzips. Man geht von

der Bemerkung aus, daß durch die Verwendung eines „frei fallenden“ Koordinatensystems das Gravitationsfeld in der unmittelbaren Nähe eines Probeteilchens aufgehoben werden kann, und glaubt dann die Schlußfolgerung ziehen zu können, daß jede frei fallende Uhr sich wie eine Normaluhr verhalten muß. Diese Schlußweise ist nicht überzeugend. Zwar würde sie im Falle der Pendeluhr zu einem richtigen, obwohl praktisch uninteressanten Ergebnis führen: Bei einer frei fallenden Pendeluhr ist die Periode – und daher auch die Eigenperiode – unendlich groß und in dieser trivialen Weise vom Ort unabhängig. Die Atome verhalten sich aber ganz anders: Die von ihnen emittierten Spektrallinien sind von der Beschleunigung unabhängig, so daß man dieselbe Rotverschiebung sowohl bei frei fallenden wie auch bei nicht beschleunigten Atomen erwarten muß. Die Lage wäre erst dann befriedigend geklärt, wenn man die Rotverschiebung ohne Verwendung der Normaluhr-Hypothese berechnen könnte.

Man kann sich nun leicht überzeugen, daß auch die Rotverschiebung sich auf zwei Bewegungsprobleme zurückführen läßt. Zunächst hat man nämlich die stationären Zustände des Atoms zu bestimmen, wobei es sich um die *quantisierte* Bewegung eines Elektrons im elektromagnetischen Feld des Atomkerns, diesmal aber bei Anwesenheit eines makroskopischen Gravitationsfeldes (z. B. des Gravitationsfeldes der Sonne) handelt. Die Lösung dieses Problems wird die Energieterme des Atoms und daher auch die Energien der emittierten Photonen am Emissionsort ergeben. Danach hat man nur noch das schon bei der Lichtablenkung behandelte Problem der Bewegung eines Photons in einem Gravitationsfeld zu lösen. Diese Analyse zeigt, daß die Rotverschiebung mit den folgenden zwei neuen Problemen zusammenhängt: 1. Berechnung des elektromagnetischen Feldes des Atomkerns bei Anwesenheit eines (makroskopischen) Gravitationsfeldes. 2. Bestimmung der quantisierten Bewegung des Elektrons im kombinierten Gravitations- und elektromagnetischen Feld.

Diese beiden Probleme sind noch keineswegs endgültig gelöst worden. Es sind uns aber gewisse Lösungen bekannt, welche eine – sei es auch nur provisorische – Behandlung der Rotverschiebung ermöglichen. Das kombinierte Gravitations- und elektromagnetische Feld kann man nämlich mit Hilfe der Feldgleichungen berechnen, welche sich aus der additiven Zusammensetzung der Lagrange-Funktionen der einzelnen Felder ergeben. Und die quantisierte Bewegung des Elektrons im kombinierten Feld kann man nach der seit längerer Zeit bekannten Verallgemeinerung der Diracschen Gleichung für den Fall eines Riemannschen Raumes behandeln. Merkwürdigerweise ist diese Rechnung bisher, soweit mir bekannt, für die allgemeine Relativitätstheorie nicht durchgeführt, obwohl das Problem für zwei andere Gravitationstheorien behandelt wurde:

Moshinsky hat es für den Fall der Birkhoffschen Gravitationstheorie, und Belinfante und Swihart haben es für die von ihnen vorgeschlagene lineare Gravitationstheorie durchgerechnet.

Die Rechnung läßt sich aber auch im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie ohne besondere Mühe durchführen, wenn man sich auf das Schwarzschildsche Gravitationsfeld beschränkt. In diesem statischen, kugelsymmetrischen Gravitationsfeld ist eine besondere Zeitskala physikalisch ausgezeichnet. Dadurch wird die Definition der stationären Atomzustände und der Energie eines Probeteilchens sowie der unmittelbare Vergleich der Energien von Probeteilchen an verschiedenen Raumpunkten ermöglicht. Die Behandlung der verallgemeinerten Dirac-Gleichung wird besonders einfach, wenn man die isotrope Form des Schwarzschildschen Linienelementes zugrunde legt:

$$ds^2 = -\alpha(r)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \gamma(r)\,dt^2.$$

Wie eine störungsrechnerische Betrachtung zeigt, darf man in der Dirac-Gleichung die Größen α und γ als konstant ansehen, da sie sich im Atomvolumen äußerst wenig ändern. Bei der Fortbewegung des vom Atom emittierten Photons wird man selbstverständlich die Funktionen $\alpha(r)$ und $\gamma(r)$ verwenden müssen.

Die stationären Atomzustände kann man übrigens auch ohne Verwendung der Diracschen Gleichung bestimmen. Da diese einfachere Rechnung die Beziehung der Rotverschiebung zum Bewegungsproblem besonders deutlich zeigt, wollen wir sie hier kurz andeuten. Es handelt sich um die unmittelbare Weiterführung der Sommerfeldschen relativistischen Behandlung des Bohrschen Atommodells. Den Ausgangspunkt liefert die Bemerkung, daß, wie in der speziellen Relativitätstheorie, auch bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes die drei ersten Komponenten des Vektors

$$P_\mu = m_0\, c\, u_\mu + \frac{e}{c}\, \varphi_\mu$$

mit den kanonischen Impulsen des Elektrons identisch sind, während $c\, P_4$ seine Hamiltonfunktion darstellt. Daher wird die Energie des Teilchens durch

$$E = c\, P_4 = m_0\, c^2 u_4 + e\, \varphi_4$$

gegeben. Diese Energie läßt sich z.B. bei kreisförmiger Bewegung des Elektrons unmittelbar berechnen, wenn man die Bewegungsgleichung und die Quantenbedingung – welche in diesem Fall die einfache Form $J_z = n\, \hbar$ hat – berücksichtigt. Als Ergebnis dieser elementaren Rechnung findet man die Sommerfeldschen Energiewerte multipliziert mit $\sqrt{\gamma}$.

Ähnlich ergibt sich aus der Diskussion der DIRAC-Gleichung, daß im SCHWARZSCHILDschen Gravitationsfeld alle Energiewerte des Atoms um den Faktor $\sqrt{\gamma}$ kleiner werden. Daher werden auch die Energien der emittierten Photonen um denselben Faktor kleiner. Man wird nun unmittelbar zur Formel für die Rotverschiebung geführt, wenn man bemerkt, daß die HAMILTONfunktion eines sich im statischen Gravitationsfeld bewegenden (ungeladenen) Probeteilchens von der Zeit unabhängig ist und daher die Energie des Teilchens konstant bleibt. Die Energien der Photonen werden also nicht mehr geändert. Danach werden Atome, die sich an verschiedenen Orten befinden, Photonen emittieren, deren Energien den an den entsprechenden Emissionsorten herrschenden Werten von $\sqrt{\gamma}$ proportional sind. Dies entspricht aber gerade dem EINSTEINschen Wert der Rotverschiebung.

Zum Schluß sei bemerkt, daß das Ergebnis dieser Rechnung nicht dasselbe Gewicht wie die Ergebnisse für die Periheldrehung und die Lichtablenkung haben kann. Letztere folgen ja unmittelbar aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, während beim ersten die nach EINSTEIN ziemlich unsichere additive Theorie von Gravitation und Elektromagnetismus gebraucht wurde.

Diskussion – Discussion

P. G. BERGMANN: (1) Die semiklassische Rechnung bzw. Gravitationspotential ist zweifellos berechtigt. (2) Warum nicht den Emissionsprozeß quantentheoretisch behandeln, so daß die Frage der stationären Zustände entfällt?

A. PAPAPETROU: Die Quantisierung von kovarianten Feldtheorien ist noch nicht in völlig überzeugender Weise durchgeführt.

H. BONDI: I am afraid I am in complete disagreement with the basis of this work. Relativity does not merely make the mathematical assertion that the orbits of the particles can be derived from a variational principle, but makes the physical assertion that the stationary quantity is the proper time. Not only would this be an empty statement if clocks measuring proper time did not exist, but we know from terrestrial experiments that Newtonian dynamics results if the time is measured with atomic clocks. Accordingly we know that on the Earth atomic clocks measure proper time ds. Neglecting the Earth's gravitational field (as we may in this context), it follows rigorously from the principle of equivalence that freely falling atomic clocks measure proper time wherever they may be. In the conditions applying on the sun's surface, collisions are relatively rare and most of the radiation is emitted while the atoms are freely

falling. Accordingly, Dr. PAPAPETROU's problem does not arise. There might conceivably be a problem concerning the radiation from ions supported against gravity by an electrostatic field. However, I tend to think that experiments on rays of ionized atoms cover this problem too. I admit I am a little puzzled by Dr. PAPAPETROU's reference to pendulum clocks, but I presume these must somehow be excluded.

A. PAPAPETROU: The collisions might be relatively rare. Nevertheless, they will, on the average, just cancel the gravitational acceleration and therefore the argument that most of the radiation is emitted while the atoms are falling freely is not convincing.

A. D. FOKKER: The gas atom will be falling freely between collisions. One might fit a geodesical frame of reference to this motion. Except for second order terms depending on curvature of space-time and representing some tidal effects, the equations are the same as in flat space-time, and the theory of spectral emission can be made as usual. I do not see there is a special problem here.

A. PAPAPETROU: The average acceleration of the atom will be zero. Besides, even if we would assume the atom to radiat only in the intervalls it is falling freely, it does not seem obvious that ,,second order terms" would not matter.

M. v. LAUE: Da der Herr Vortragende die Pendeluhr als Beispiel einer Uhr zitiert hat, die sich nicht als ,,Normaluhr" eignet, möchte ich mir die triviale Bemerkung gestatten, daß eine Pendeluhr, wie man sie im Laden kaufen kann, *an sich* gar keine Uhr ist, sondern dies erst in Verbindung mit der Erde wird. Meines Erachtens ist die Frage so zu stellen: Ist eine Pendeluhr in Zusammenhang mit einem geeigneten Gravitationszentrum als ,,Normaluhr" brauchbar? Und dies würde ich für meinen Teil bejahen.

A. PAPAPETROU: Die Pendeluhr wurde von mir nur deshalb erwähnt, um zu betonen, daß eine Uhr erst dann sich als Normaluhr verhalten muß, wenn sie im Gravitationsfeld frei fällt.

A Time-keeping Problem Connected with the Gravitational Red-shift

by W. H. McCrea (London)

Abstract. It is shown in accordance with general relativity theory that a clock carried on a particle which describes a circular orbit in a central gravitational field appears to go slow as compared with a clock carried on a particle at a greater orbital distance. The factor appearing in the comparison can be interpreted by a combination of the effects concerned in Einstein's gravitational red-shift and in Einstein's clock-paradox, being an instructive illustration of these effects.

1. In calculations of the gravitational red-shift it is usually assumed that the light-source and the observer are at rest in the frame of reference employed. This assumption can be justified in the context. Nevertheless, bodies cannot remain at rest in this sense in a purely gravitational field. Therefore it is of interest to study a case where the bodies concerned are explicitly taken to be in possible states of motion in the field. Such a study helps to elucidate the problem of time-keeping which is involved in the interpretation of the red-shift.

The example we use appears to be the simplest available. We consider two particles (with observers) describing circular orbits in the gravitational field of a massive body, conveniently called the 'star'. We take the case where the orbital periods are commensurable in the sense that any particular configuration of the whole system is repeated periodically. Our object is to calculate the times between successive repetitions in the reckonings of the two observers and to interpret the results. The treatment is to be in accordance with the standard theory of general relativity.

2. The gravitational field of a 'star' of mass M is given in a standard notation by the Schwarzschild metric

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{m}{r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - 2\frac{m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \quad (1)$$

where $m = \gamma M/c^2$ and γ is the gravitational constant. We consider motion only in a particular plane $\varphi =$ constant, as we may do without loss of generality.

One of the equations for a geodesic in the space-time is

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1-2\frac{m}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{ds}\right]-\left(1-2\frac{m}{r}\right)^{-2}\frac{m}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2+\frac{m\,c^2}{r^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0\,.$$

If $r=a$, where a is a constant, this reduces to

$$m\,c^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-a^3\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2=0\,. \tag{2}$$

With $r=a,\ dr=0,\ d\varphi=0$ we have from (1)

$$\left(1-2\frac{m}{a}\right)c^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-a^2\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2=1\,. \tag{3}$$

If (2), (3) are satisfied, it is easily verified that all the conditions for a geodesic are fulfilled. Thus (2), (3) are necessary and sufficient conditions for a test-particle to describe a circular orbit $r=a$ in the given field.

From (2) we obtain $c\,dt/d\vartheta=(a^3/m)^{1/2}$ so that if ϑ increases by $2\,\pi$ then t increases by the amount T where

$$c\,T=2\,\pi\left(\frac{a^3}{m}\right)^{1/2} \tag{4}$$

We call T the *coordinate period* of the orbit.

From (2), (3) we obtain also $ds/d\vartheta=(a^3/m)^{1/2}\,(1-3\,m/a)^{1/2}$ and (see below) we assume $a>3\,m$. Hence if ϑ increases by $2\,\pi$ then s increases by the amount $c\,P$ where

$$c\,P=2\,\pi\left(\frac{a^3}{m}\right)^{1/2}\left(1-3\,\frac{m}{a}\right)^{1/2}=\left(1-3\,\frac{m}{a}\right)^{1/2}c\,T\,. \tag{5}$$

We call P the *proper-period* of the orbit; according to the postulates of relativity theory, this is the period assigned by an observer attached to the particle.

3. Consider now two particles (with observers) describing circular orbits of the sort obtained above. Quantities associated with them will be distinguished by suffixes 1, 2 respectively. Suppose the orbits to be such that

$$T_2=p\,T_1 \tag{6}$$

where p is an integer and $p>1$, so that (4) gives $a_2=p^{2/3}\,a_1$. Suppose also that for $t=0$ we have $\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=0$.

Then for $t = T_2$ we have $\vartheta_1 = 2\,p\,\pi$, $\vartheta_2 = 2\,\pi$ which gives for the whole system the same geometrical configuration as that for $t = 0$. In other words, a change of origin of the t-coordinate by the amount T_2 makes no change in the geometrical specification of the system.

Thus the picture of the whole system formed by either observer is repeated at intervals T_2 of t. From (5), (6) the proper-time intervals between such repetitions are for the two observers, respectively,

$$p\,P_1 = \left(1 - 3\,\frac{m}{a_1}\right)^{1/2} T_2, \qquad P_2 = \left(1 - 3\,\frac{m}{a_2}\right)^{1/2} T_2. \tag{7}$$

Since $a_2 > a_1$, we have $P_2 > p\,P_1$.

We have, therefore, *a system which, including the observers, returns to a state precisely the same as a previous one and is such that different observers assign different times for the cycle.*

4. The further analysis is sufficiently illustrated by assuming $m/a_2 \ll m/a_1 \ll 1$. This is the case of a particle 2 remote from the star and a particle 1 much closer to the star but far enough for m/a_1 to be a small quantity. (It is well-known that for any actual body the ratio m/r is small compared with unity at any exterior point.)

In this case (7) yields approximately

$$\frac{P_2}{p\,P_1} = 1 + \frac{3}{2}\,\frac{m}{a_1}. \tag{8}$$

This means, in particular, that if observer 2 sees a clock carried by observer 1 to register the passage of proper-time $p\,P_1$, then observer 2 using a similar clock carried by himself will assign a time-interval P_2 to this occurrence, where $P_2 > p\,P_1$ in accordance with (8).

Neglecting terms in m/a_2, observer 2 will regard himself as being in a Minkowski space-time. To a first approximation, he will regard observer 1 as having a constant speed $a_1\,d\vartheta_1/dt = c\,(m/a_1)^{1/2} = V$, say, relative to himself. Consequently, he will expect a clock carried by observer 1 to appear to go slow in accordance with the *time-dilatation* factor

$$(1 - V^2/c^2)^{-1/2} \doteqdot 1 + \frac{1}{2}\,m/a_1.$$

Further, the usual derivation of the *gravitational red-shift* means precisely that, if an observer sees a clock in a region where the gravitational potential is less by an amount ψ than that at his own position, then the clock will appear to him to go slow by a factor $1 + \psi/c^2$, assuming $\psi/c^2 \ll 1$. In the present case, observer 2 regards observer 1 as being always at a distance from the star where, to a first approximation, the potential is less than at himself by the amount $\psi = \gamma\,M/a_1$. So, from the definition of m, we have $1 + \psi/c^2 = 1 + m/a_1$.

Thus observer 2 can interpret the term $3/2\ m/a_1$ in (8) as comprising $1/2\ m/a_1$ from the usual time-dilatation and m/a_1 from the same effect as the gravitational red-shift. Thus we have an example in which *the gravitational red-shift is exhibited by a system whose total behaviour in the gravitational field is taken into account.*

5. *Discussion.* (a) It is sometimes asked, Does a clock 'really' go slow if it is placed in a gravitational field? There is, of course, no meaning to the question if it be restricted to what can be observed at the position of the clock itself. But the gravitational red-shift does imply, for example that the time-interval between two events on the Sun as measured by a clock at the Sun's surface is less than the time-interval between the same events measured by a similar clock on the Earth. This is in agreement with the interpretation of our example.

(b) In the example, the behaviour of a clock carried by one observer as actually seen by the other observer *at any particular epoch* will be complicated by the first-order Doppler effect. But this does not affect the results as they have been stated. Naturally, it would be possible to work in terms of what is observed at each instant and then to integrate over the cycle. In the example there is no fundamental significance in taking the coordinate-periods to be commensurable; this assumption merely simplifies the exposition, in effect, by yielding the integrated result directly.

(c) The result (8) means also that the observer 1 will see a clock carried by 2 to go *fast* (on the average) by the factor calculated. The part m/a_1 of the term $3/2\ m/a_1$ now comes from a gravitational 'blue-shift'. The part $1/2\ m/a_1$ still comes from the time-dilatation exactly as in the standard result of Einstein's *clock-paradox*, of which the present example affords an instructive confirmation. It should be noted that the approximation employed does *not* place observer 1 in a Minkowski space-time, so there is no question of obtaining the effect of the time-dilatation directly from the motion of 2 relative to 1. It is the erroneous attempt to do this that would produce the paradox. The difference between the two observers, and in particular the 'discrepancy' $1/2\ m/a_1$ in their time-keeping contributed by the time-dilatation, is absolute. It should, in fact, be further noted that a relation of the type (8) between time-reckonings of two observers does not arise in special relativity since that theory cannot treat such cyclic processes involving, as they must, observers in accelerated relative motion.

(d) It may not have been remarked before that, in accordance with (5), the distance $3\ m = a_0$, say, is a critical distance for the Schwarzschild space-time. It is the distance for which a circular orbit demands an orbital speed equal to the speed of light.

On the Two-Body Problem of General Relativity

by E. CORINALDESI
(Dublin Institute for Advanced Studies)

Recently GUPTA [1] put forward the view that EINSTEIN'S theory of gravitation can be reinterpreted as a theory in flat space with a Lagrangian density consisting of an infinite number of terms. On the basis of this idea, he has evolved a practicable method of quantization of the gravitational field in interaction with the electromagnetic field, which is an extension of ROSENFELD'S early work on the quantization of the linearized EINSTEIN equations.

In this note we shall endeavour to present, as an argument for the soundness of GUPTA'S approach, a field theoretical derivation of the equations of the two-body problem of general relativity, which were found by EINSTEIN, HOFFMANN and INFELD [2] (the HEI equations).

Consider the Lagrangian

$$L = -\frac{1}{4}\left(\gamma_{\mu\nu,\lambda}\,\gamma_{\mu\nu,\lambda} - \frac{1}{2}\gamma_{,\lambda}\,\gamma_{,\lambda}\right) + \sum_{i=1}^{2}\left\{L^{(i)} - \frac{1}{2}\varkappa\, h_{\mu\nu}\, T^{(i)}_{\nu\mu}\right\}$$

with $h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \gamma/2\,\delta_{\mu\nu}$. Here $\gamma_{\mu\nu}$ and $\gamma = \gamma_{\mu\mu}$ represent the gravitational field, and $L^{(i)}$, $T^{(i)}_{\mu\nu}$ are the Lagrangians and the energy momentum tensors of two fields of scalar particles of mass m_1 and m_2. Terms of higher order in $\varkappa$ have been neglected as they are not necessary for our purpose. The Lagrangian in its entirety would be equivalent to the general theory of the gravitational field co-existing with the two scalar fields.

From the Lagrangian it is easy to deduce the interaction Hamiltonian in the interaction representation, and to calculate, by the FEYNMAN-DYSON method, the matrix element for scattering of a particle m_1 by a particle m_2 due to the exchange of one graviton. The matrix element thus obtained $(\vec{p}_1\,\vec{p}_2\,|\,V\,|\,\vec{p}_1{}'\,\vec{p}_2{}')$, is translated into configuration space by a FOURIER transformation, and defines a velocity dependent potential $(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,|\,V\,|\,\vec{r}_1{}'\,\vec{r}_2{}')$ of the order of $\varkappa^2$, which reduces to the NEWTON poten-

tial if the velocity dependent terms are neglected. This potential is then used in the two particle Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2\,m_1}\,\vec{p}_1^{\,2} + \frac{1}{2\,m_2}\,\vec{p}_2^{\,2} - \frac{1}{8m_1^3}\,(\vec{p}_1^{\,2})^2 - \frac{1}{8m_2^3}\,(\vec{p}_2^{\,2})^2 + \ldots + V$$

by the help of which the second time derivative of the coordinate r_1^i is evaluated by the formula

$$\ddot{r}_1^i = -[H, [H, r_1^i]]\ .$$

The calculation has actually been performed in the coordinate representation, and the matrix element $(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,|\,\ddot{r}_1^i\,|\,\vec{r}_1'\,\vec{r}_2')$ has been found.

Take now a wave function $\Psi\,(\vec{r}_1\,\vec{r}_2)$ representing two spatially separated wave packets for the two particles m_1 and m_2. The expectation value

$$\langle\ddot{r}_1^i\rangle = \int \Psi^*(\vec{r}_1\,\vec{r}_2)\,(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,|\,\ddot{r}_1^i\,|\,\vec{r}_1'\,\vec{r}_2')\;\Psi\,(\vec{r}_1'\,\vec{r}_2')\,d\vec{r}_1\ldots d\vec{r}_2'$$

is, by a series of partial integrations and by neglecting terms more than quadratic in the velocities, found to reduce to an expression which agrees with the HEI equations.

It is to be remarked that this derivation of the equations of the two-body problem is not necessarily quantum-mechanical. The procedure is of a Hamiltonian type and admits of a classical version.

Diskussion – Discussion

B. Jouvet: Je voudrais faire une remarque sur le sens possible des termes non-linéaires contenus dans le Lagrangian du champ de gravitation d'Einstein, à la lumière des nouvelles théories des particules élémentaires, basées sur la donnée de couplages de Fermi entre paires de Fermions [3] et [4]. Il ressort de ces théories que les particules de spin plus grand que 1, et en particulier les particules de spin 2 (gravitons), n'ont généralement pas d'interaction 'locales' avec les particules qui les émettent (absorbent). Cela provient du fait que le graviton, formé de 4 Fermions, doit pour être émis, faire intervenir nécessairement deux fois le couplage de Fermi qui crée chaque fois une paire de Fermions, en deux instants-points qui n'ont pas de raison d'être confondus. Le champ du graviton est alors un champ non local $\varphi\,(x_1, x_2)$. On est conduit à rapprocher cet aspect non local de l'interaction, de la forme non linéaire des équations d'Einstein. Il serait utile de savoir si la solution générale du problème des deux corps en relativité générale, mise sous la forme d'une matrice de diffusion

comme l'a fait le Dr. Corinaldesi, conduit aussi à une interaction non locale de la forme $\int d_1 d_{1'}\, d_2 d_{2'}\; T_{\mu\nu}(x_1, x_1')\, K_{\mu\nu\sigma\tau}(x_1, x_1', x_2, x_2')\, T_{\sigma\tau}(x_2, x_2')$, les fonctions $T_{\mu\nu}(x, x')$ tendant vers le tenseur d'énergie $T_{\mu\nu}(x_1)$ dans la limite où $x - x' \to 0$.

L. Infeld: Is the Lagrangian arranged this way so as to give the right equations of motion?

E. Corinaldesi: It is obtained by expanding in powers of $\varkappa$ the general relativistic Lagrangian including the scalar fields of mass m_1 and m_2. The present work therefore, claims to be a consistent derivation of the HEI equations.

O. Costa de Beauregard: Je voudrais faire une remarque sur la théorie du graviton, particule de spin 2: La déduction de l'approximation quasi-minkowskienne de la théorie de la gravitation à partir de la théorie de la particule de spin 2, et de l'hamiltonien d'interaction indiqué par M. Corinaldesi a été méthodiquement démontrée par Mme Tonnelat [5]. Récemment, nous sommes revenus nous-mêmes sur le sujet [6]. Il est permis de penser que l'actuelle incapacité de la mécanique ondulatoire à dépasser l'approximation quasi-minkowskienne ne prouve pas l'inexistence des gravitons, mais

1° l'inadéquation radicale de la «représentation d'interaction» (méthode de pertubations) en ce domaine,

2° la probabilité nulle ou évanescente d'émission-absorption de gravitons libres, c'est à dire en particulier l'absence d'écrans à la gravitation.

Bibliography

[1] Gupta, S. N., Proc. Phys. Soc. (London) [A] *65*, 161, 608 (1952), Phys. Rev. *96*, 1683 (1954).
[2] Einstein, A., Infeld, L., and Hoffmann, B., Ann. Math. *39*, 66 (1938); Cf. also Bertotti, B., Nuovo Cimento, *12*, 226 (1954).
[3] Heisenberg, W., Nachr. Gött. Akad. Wiss. *1953*, p. 111.
[4] Jouvet, B., Journal de Math. *33*, p. 201 (1954).
[5] Tonnelat, A., Annales de Physique, *17*, 158 (1942) et *19*, 396 (1944).
[6] Costa de Beauregard, O., Comptes Rendus *240*, 2383 (1955).

Cosmological Theory

by H. P. Robertson

California Institute of Technology, and Supreme Headquarters Allied Powers Europe

Cosmology, in the broadest sense of the word, is that branch of learning which treats of the Universe as an ordered system. Of recent years cosmology has come to deal more particularly with the study of the distribution in position and motion of matter and energy in the large, seeking out those general traits which characterize the nebular universe and exploring their implications for the past and for the future. This trend in cosmology can be attributed to two, initially quite separate, developments of the present century — the formulation of the relativity theories on the one hand, and the enormous widening of our astronomical horizon made possible by the great telescopes and their ancillary tools. The confluence of these two streams within the past few decades has resulted in an ordered picture of the universe as a whole which, although it may not as yet have given us an unequivocal quantitative model, nevertheless serves as a challenge to theory and as a guide to observation.

In this brief account of cosmological theory I shall diverge from the path of the historical development, presenting only a skeletal framework which seems to me to encompass the broad achievements of recent years and which may serve as a platform from which to launch advances in the future. The elements of this framework are the contributions of many of our past and present colleagues, but among them stand out above all those of Einstein on the theoretical, more mathematical, side, and of Hubble on the observational, more astronomical, aspects. I am sure it is to all of you, as it is to me, a source of great regret and even of personal loss that these two masters cannot be with us today to express their own views on this subject to which they each contributed so much.

In keeping with this program, I shall in Part I of my talk sketch briefly the mathematical framework which is available for – I might even say is forced upon – any cosmological theory which treats the universe as a spatially uniform continuum, at each event of which the mean motion

of matter is essentially unique. These assumed uniformities in the substructure imply the existence of a universal or 'cosmic' time t, and a layering of space-time into homogenous and isotropic spaces $t =$ const., the whole being necessarily tied together by a quadratic metric adapted to a pertinent description of the material and energetic content. This kinematical model of the universe is determined in principle by the curvature $K(t)$ of the various spatial sections – or more precisely, by the sign k of the curvature and a single function $R(t)$ which, for $k \neq 0$, is the equivalent 'radius' defined by $K(t) = k/R^2(t)$.

In Part II, I turn to the problem of interpreting the physical observables – such as apparent magnitude, apparent diameter and redshift – in terms of the abstract elements of the mathematical framework – the variables representing distance, size and velocity. The relations which exist between these latter mathematical concepts, in virtue of the geometry and kinematics prescribed in the model, can be translated into relations between the corresponding observables. The appeal to the empirical should then give certain limited information concerning the present value and the present trends of the function $R(t)$ defining the model. At the present time the most promising empirical approach appears to lie in the determination of the relation between the redshift $z = \Delta\lambda/\lambda$ and the apparent magnitude m of distant nebulae. For this examination I am very pleased to be able to present here the results of a survey of all existing redshift data – the first comprehensive one in twenty years – which has recently been completed by HUMASON, MAYALL and SANDAGE at the Mount Wilson-Palomar and Lick Observatories, and which the authors have most kindly put at my disposal to include in my account to you. From the deviation from the linear velocity-distance relationship, brought out by this survey, it appears that the motion of the nebulae at the present epoch is one of deceleration – a result which portends a certain amount of difficulty in reconciling the implied age of the universe with those obtained from other considerations.

But the exploitation of the observational material alone can never tell us how the nebular universe may be expected to develop in the future, nor from what it may have developed in the past. For this we must call upon field equations which relate the curvature $K(t)$ of the mathematical model to the distribution of matter and energy observed in the real world. A number of field equations which warrant attention have been proposed, including those presented in recent years by HOYLE and by JORDAN, and we may well expect that a fruitful interaction between the relativity and quantum theories will produce others more inclusive in the near future. Nervertheless I shall confine myself in the final Part III to those models whose temporal behavior is governed by the field equations

of the general theory of relativity – which in spite of its impotence in dealing with MACH's Principle or the microscopic realm may yet be the springboard from which a more complete theory takes off, much as it itself took off from the Newtonian theory. Upon retaining the questionable 'cosmological constant' Λ, introduced but later disowned by EINSTEIN, we find that a unique determination of the model requires three independent empirical data. The new velocity-distance relationship offers us two such data, and as the third we could take the mean density of matter in our more immediate cosmic neighbourhood. But of these three the only one which is not beset by great uncertainty is the coefficient H of the linear term in the velocity-distance relationship; I therefore prefer to take H as the only fixed datum, and to consider the two-parameter family of general relativistic models characterized by a range of values of the present density ϱ_0 and of the epoch t_0. You may well object that t_0, the 'age of the universe', is hardly accessible to direct observation. Yet I take it as a significant parameter because other considerations require that it lie within certain reasonably well-defined limits; it must be long enough to allow for the observed geological and cosmogonical features of our local system, and yet not so long as to lead to the exhaustion of the radioactive and fusion processes taking place about us – all this, of course, on the assumption, implied in the field equations, that the total energy of the system is conserved.

The results of this survey of possible models show that we can satisfy the semi-quantitative restrictions which observation places on the density ϱ_0 and the epoch t_0 – although to do so we may have to retain the ghostly cosmological constant Λ. But even this unpalatable imposition may be avoided, for on adopting the value $H = 180$ km/s per Mpc of the Hubble constant implied by BAADE's and SANDAGE's recent revisions of the nebular distance scale, we are led to a model of the EINSTEIN-DE SITTER type ($\Lambda=0, k=0$) whose present density is $6{\cdot}2 \times 10^{-29}$ gm/cm^3 and whose age is 3·6 billion years. Although this density is a little on the high side and the age a little on the low, they are nevertheless both of an acceptable order of magnitude – and any further upward revision of the distance scale, as has been suggested by some, would improve the fit. But in spite of this, all is still not well, for the deceleration implied by the new Mount Wilson-Palomar-Lick survey requires a still greater density, and this in turn would decrease the age to a point where it would be necessary to resurrect Λ.

My general conclusion is that there is found in this examination of the cosmological problem no compelling reason for seeking an explanation of the redshift as other than DOPPLER shift due to the motion, nor for abandoning the field equations of general relativity as untenable. Never-

between our galaxy and its neighbours which [illegible] as evidence upon which to base our theoretical investigations, and with features which may be in agreement with knowledge of the nature and distribution of matter in the large.

Part I: The Kinematical Model

The simplest model which can be expected to portray the gross characteristics of the actual universe must take account of the observed large-scale distribution, in position and motion, of the extragalactic nebulae. Although the local irregular clustering by obscuring the existence of regions sufficiently large, the observations suggest that to some degree of approximation, these nebulae may be considered as uniformly distributed throughout space. The only direct knowledge we have of the motions of nebulae at great distances from us is the redshift in their spectra, interpreted as Doppler effect due to a radial component of relative motion. So far as the observed motion is concerned, the evidence indicates that there is at each place in the universe a natural state of motion, deviations from which are small in comparison with the only significant velocity, the velocity of light.

The first step in the idealization is to replace these real nebulae by ideal average nebulae, distributed at random through observable space, and having a natural state of motion in each neighbourhood. Included also must be the light rays, by which the observer obtains visual and spectrographic data on the nebulae. These nuclei, and these alone being included, there should be no intrinsic characteristic involved which could serve to distinguish one nebula or one nebular region from any other. Technically, the model should be homogeneous and isotropic. In dealing analytically with this model, we shall adopt the Eulerian device of considering the material contents as a hydrodynamical fluid, rather than as particulate matter – but this is only a mathematical trick to simplify the analysis and properly handled should have no cosmological implications.

Consider now the world-line of one such idealized nebula N, along which some cyclic 'clock' measures time t and at each event of which light signals can be sent or received in any direction. The view of the nebular system obtained from the world-line of N must be identical with that obtained from the world-line of any other such nebula N′ – an equivalence extending even to a numerical series of clock readings, provided the clocks are numerically identical and are appropriately set. Further, the uniformity assumptions imply that the two-dimensional space-time surface S generated by the totality of light signals from N to N′ coincides with that generated by the signals from N′ to N, and that if one event

on the world-line of a third nebula N″ is in S, then the whole of its world-line must also lie in S [1].

A signal sent out by N at time t_1, as measured by his clock, will be received by N′ at a time t_1' which is some function $p(t_1)$ of t_1; uniformity

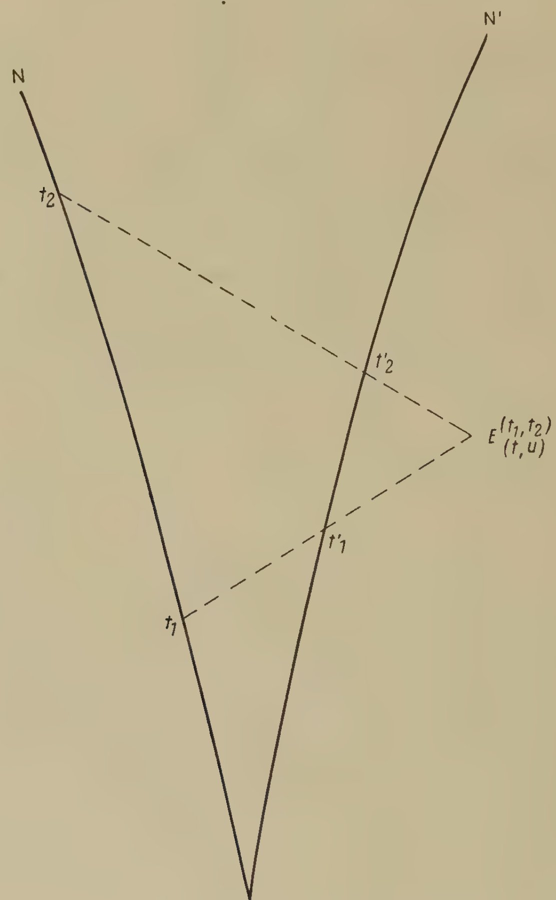

Fig. 1

then demands that a signal sent out at time t_2' by N′ will be received by N at the time $t_2 = p(t_2')$ defined by the same function p. The situation is as depicted in Figure 1; as there indicated, any event E in the surface S is characterized by the coordinate pair (t_1, t_2), or alternatively by the pair (t_1', t_2'). The relations described above between these two pairs, with the aid of the function p, may be considered as the equations of transformation from the one coordinate system to the other.

Considering now the one-parameter family of world-lines lying in one such surface S, the relations

$$t_1' = p(t_1) = f(t_1, u)\,, \quad t_2 = p(t_2') = f(t_2', u) \tag{1}$$

between any two of them must constitute a one-parameter group G_1, characterized by a continuous parameter u associated with the pair N, N′. This group property gives us a very powerful tool for analysing the nature of the relations existing between any two nebulae in the surface S, and by extension between any two nebulae in the entire model. The theory of continuous groups enables us to conclude that, on appropriate normalization of the group parameter u, the relations in S are uniquely determined by a single function $\xi(t)$, the generator of the group G_1. The finite equations of the group are then

$$F(t_1') = F(t_1) + u\,, \quad F(t_2') = F(t_2) - u\,, \tag{2}$$

where

$$F(t) = \int^t \frac{dt}{\xi(t)}\,.$$

The parametric lines $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$ represent the two families of light rays in S, which may therefore be characterized by the vanishing of the quadratic form

$$dt_1\, dt_2 = 0, \quad \text{or} \quad dF(t_1)\, dF(t_2) = 0\,. \tag{3}$$

The second of these forms is invariant under the transformations of the group, for $dF(t_1)$, $dF(t_2)$ are the two fundamental differential invariants of G_1. We now ask whether an invariant form can be introduced which not only accounts for the light lines, as above, but also for the nebular world-lines themselves. Such a form depends at most on the above two differential invariants $dF(t_1)$, $dF(t_2)$ and upon the sole finite invariant $F(t_1) + F(t_2)$ of the group; in place of this later it will be found convenient to use the invariant t defined implicitly by the equation

$$F(t) = \frac{1}{2}\left[F(t_2) + F(t_1)\right]; \tag{4}$$

no inconsistency is involved in naming this invariant t, for it is in fact the same as the coordinate t for an event on the world-line $t_2 = t_1$ – a universal or 'cosmic' time which serves to synchronize those events on

different world-lines from which identical world-views are obtained. A metric satisfying these conditions is of the form

$$ds^2 = \varphi(t)\, dF(t_1)\, dF(t_2) = \frac{\varphi(t)}{\xi(t_1)\, \xi(t_2)}\, dt_1\, dt_2 \,.$$

Clearly ds will measure the cosmic time interval dt along the world-line $t_1 = t_2$ provided we choose $\varphi(t) = \xi^2(t)$, i.e. choose as the metric

$$ds^2 = \frac{\xi^2(t)}{\xi(t_1)\, \xi(t_2)}\, dt_1\, dt_2 \,. \tag{5}$$

Further, the nebular world lines are geodesics of the metric ds^2, just as they are in the general theory of relativity.

On introducing as a second new coordinate the parameter

$$u = \frac{1}{2}\, [F(t_2) - F(t_1)] \tag{6}$$

arising from the group, the linear element (5) assumes in terms of t and u the Gaussian form

$$ds^2 = dt^2 - \xi^2(t)\, du^2 \,. \tag{7}$$

It is then a simple application of the Helmholtz-Lie theorem to show that this quadratic linear element can be extended to the full (3 + 1)-dimensional space-time, where du^2 is then the metric of an auxiliary 3-dimensional space of constant Riemannian curvature – which may, on appropriate renormalization of the generator $\xi(t)$, be taken as $k = +1$, 0 or -1. Coordinates η, ϑ, φ may then be introduced in which the auxiliary metric du^2 assumes the canonical form

$$du^2 = d\eta^2 + \sigma^2(\eta)\, [d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2] \tag{8}$$

where $\sigma(\eta) = \sin\eta,\ \eta,\ \sinh\eta$ for $k = +1,\ 0,\ -1$, respectively.

It has thus been shown, by purely geometrical-kinematical reasoning, that the idealized nebular universe admits a quadratic metric ds^2, characterized by a single function $\xi(t)$ of cosmic time, and the sign k of the curvature of the auxiliary metric du^2. The world-lines of the idealized nebulae are the special geodesics η, ϑ, φ = const. of ds^2, and the light-lines are the null-geodesics, exactly as in Einstein's general theory of relativity. But here the existence of the metric has not been *assumed*, it

has been *deduced* from the general uniformity conditions defining the problem. The choice of a specific model will of course depend on the physical theory imposed.

It is to be emphasized that we have not *required* the real universe to be one satisfying the uniformity conditions imposed above; we are merely examining the nature of that idealized model of the real world in which the obvious and all-important inhomogeneities are ironed out. We are not imposing the uniformity as a 'cosmological principle', in the terminology of MILNE [2], to which the real world must adhere.

Among the models thus found there are two which are of special interest as exhibiting the further uniformity that any event on the world-line of a nebula is intrinsically indistinguishable from any other, a situation which BONDI and GOLD [3] have characterized by the term 'perfect cosmological principle'. It is readily shown [4] that in this case we must have either the 'EINSTEIN universe'

$$\xi(t) = \text{const.},\ k \text{ arbitrary} \tag{9 E}$$

or the 'DE SITTER universe'

$$\xi(t) = e^{t/b},\ k = 0\,. \tag{9 S}$$

Included as a special case of both is the familiar MINKOWSKI space-time

$$\xi(t) = \frac{1}{c^2}\,,\ k = 0\,. \tag{9 M}$$

One further service is performed by the linear element ds^2, the measurement of spatial distance within a volume element – which is, it will be remembered, some millions of parsecs across. For locally this linear element performs the same functions as does the MINKOWSKI metric of the special theory of relativity in measuring proper time and describing the light-lines as generators of the cone $ds^2 = 0$. Hence ds^2 may also serve the same purpose of measuring local distances in the space $t = \text{const.}$; in the general coordinates here employed the spatial metric thus induced is

$$dr^2 = c^2\,\xi^2(t)\,du^2 = R^2(t)\,du^2 \tag{10}$$

where we have for later convenience written $R(t) = c\,\xi(t)$. The curvature $K(t) = k/R^2(t)$ of this metric completely defines the full cosmological model, excluding topological considerations.

Part II: Theoretical and Observational Relations

We turn now to the consideration of the implications of the kinematical model for possible observations on distant nebulae. Our knowledge of these nebulae derives solely from optical and other electromagnetic radiations which we receive from them. To examine the basic nature of this phenomenon, consider radiation which is emitted by a nebula $N(\eta, \vartheta, \varphi)$ at time t_1 and is received at time t_0 by an observer at the nebula O for which $\eta = 0$. If u be the parameter distance from O to N, as measured by the auxiliary metric du^2, then the three variables t_1, t_0 and u are tied together by the condition

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\xi(t)} = u \,. \tag{11}$$

Next consider the light emitted by N in the interval t_1, $t_1 + dt_1$; it will be received in the interval t_0, $t_0 + dt_0$ defined by the relation

$$\frac{dt_0}{\xi(t_0)} = \frac{dt_1}{\xi(t_1)}$$

obtained from equation (11) on holding the parameter distance u between the nebulae constant. From this it follows that the change $\Delta\lambda$ in the wave-length of this light defined by the relation

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\xi_0}{\xi_1} - 1 \,, \tag{12}$$

where the subscripts indicate the time at which $\xi(t)$ is computed.

Holding the time t_0 of observation fixed, the first of these two equations defines the unknown time of emission t_1 in terms of the (equally unknown) parameter distance u, and the second defines the unknown t_1 in terms of the observable 'redshift' z. On eliminating the unknown t_1 between the two, we obtain the series expansion

$$z = \dot{\xi}_0 u + \frac{1}{2} (\dot{\xi}_0^2 - \xi_0 \ddot{\xi}_0) u^2 + O^3 \tag{13}$$

for the redshift in terms of u, where the dots indicate the derivatives of $\xi(t)$ with respect to its argument t. This relation expresses a dependence of the observable shift in wave-length on the parameter u, which latter is in some way a measure of the distance between the two nebulae.

To get at an approximate interpretation of this relation for the nearer nebulae, we recall the fact that for them the local MINKOWSKI distance r at the time of observation t_0 is related to u, as in equation (10), by

$$r = c\,\xi_0\,u = R_0\,u. \tag{14}$$

To the approximation in which the concepts used are valid, the principal term in the relation (13) above enables us to write

$$c\,z \sim H\,r\,, \tag{15}$$

where $H = \dot{\xi}_0/\xi_0$. Interpreting the redshift z as the DOPPLER effect due to motion of the nebula N relative to O, the term $c\,z$ on the left is to the present approximation the velocity of recession of N with respect to O, and the relation (15) expresses the approximate linear velocity-distance effect [5]. The most recent surveys, discussed more fully in the sequel, give as the value of HUBBLE's constant

$$H = 180 \text{ km/sec per megaparsec, or } 5{\cdot}9 \times 10^{-18}\,\text{sec}^{-1}. \tag{16}$$

A conceptually more satisfying interpretation of this constant is that, had the inferred nebular velocity remained the same for each nebula throughout past time, then all the nebulae in the model would have started from a common origin $1/H = 5{\cdot}4$ billion years ago.

But we have gotten ahead of the story, for the approximate distance r is not itself an observable; it is inferred in practice from the rate at which light from the nebula is received in the telescope. The true observable is thus the apparent luminosity l of the nebula, or equivalently its apparent magnitude m – the luminosity measured on a logarithmic scale. If we assume that photons are conserved in traversing internebular space, and that their energy and frequency are related by PLANCK's law in which the constant of proportionality h is independent of cosmic time, then it can be shown that the apparent bolometric luminosity of a nebula observed at time t_0 is

$$l = \frac{L_1}{4\,\pi\,R_0^2\,\sigma^2(u)\,(1+z)^2}\,, \tag{17}$$

where L_1 is the total rate of output of energy at the time t_1 [6]. On eliminating the parameter u between equations (17) and (13), we find a relation between the observables z and m, at the expense of introducing the new parameter L_1, which is however an intrinsic property of the nebula.

This new relation, expressed in logarithmic form, has as its principal terms

$$m = M_0 - 45{\cdot}06 + 5 \log\left(\frac{z}{H}\right) \\ + 1{\cdot}086\left(1 + \frac{\ddot{R}_0}{H^2 R_0} - 2\,\mu\right) z + 0^2, \tag{18}$$

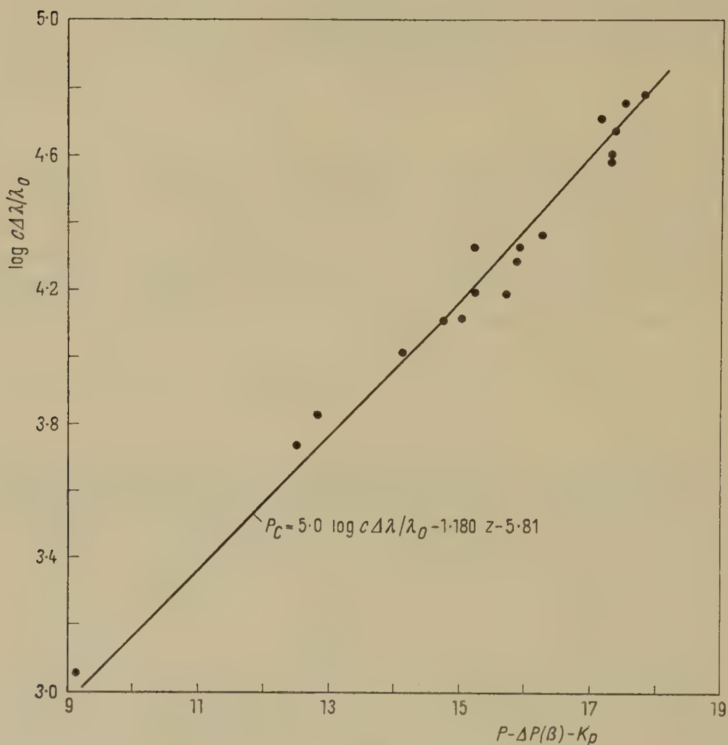

Fig. 2

where M_0 is the absolute magnitude of the nebula at the time t_0 of observation, and the constant μ is the term $0.46\ \dot{M}_0/H$ which allows for a possible change in the absolute magnitude of the nebula since the time when the light was emitted [7]. The terms on the first line are those which would give a linear 'velocity-distance' relationship of the form (15), if we simply define r in terms of m by the usual astronomical practice. If the light travels through an internebular absorbing material, the effect on the apparent magnitude can be taken into account by introducing a suitable negative term into μ. These corrections are due to effects arising outside the atmosphere; to them must be added others due to differential absorp-

tion with wave-length of light in traversing the atmosphere and the telescope, into which we will not enter in detail.

The observational material on redshifts from distant nebulae has recently been pulled together in a comprehensive survey — the first in twenty years — by HUMASON, MAYALL and SANDAGE at the Mount Wilson-Palomar and Lick Observatories, shortly to be published in the Astronomical Journal. I am deeply indebted to these authors for communi-

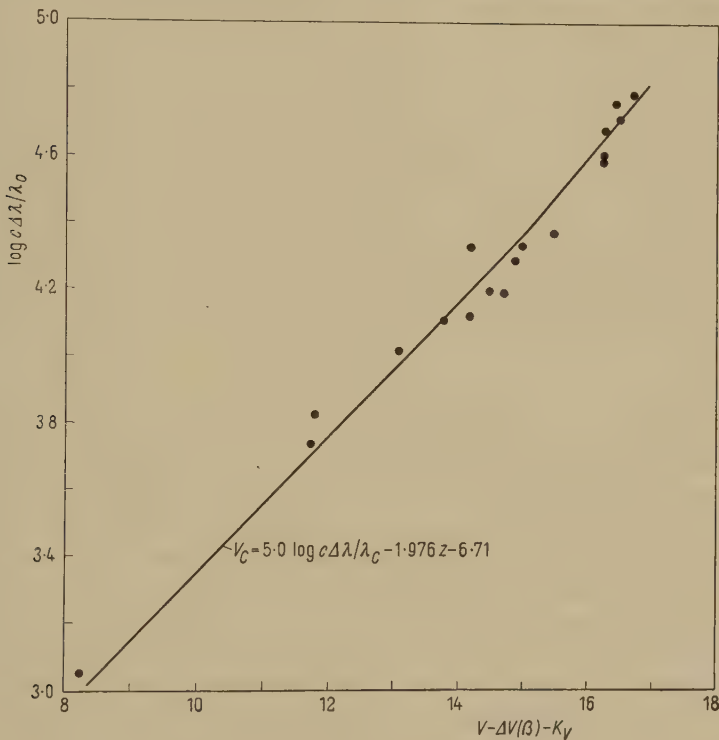

Fig. 3

cating their results to me, and for permitting me to present them to this conference. The most significant of their results for the cosmological problem is the relation they find between redshift and apparent magnitude of the brighter members of 18 clusters. The redshifts observed range up to 0.2 and the apparent magnitudes up to 18, implying velocities up to $^1/_5$ that of light and distances of over a billion light-years. Their results are given in the accompanying Figs. 2 and 3, in which the logarithm of *cz* is plotted against the photographic (Fig. 2) and the photovisual (Fig. 3) apparent magnitude, corrected in accordance with current practice for absorption within our own galaxy and for atmospheric and instrumental

effects. Note that a linear velocity-distance relationship would be represented by a line parallel to the diagonal of the coordinate frame in these charts; it is apparent that the best fit of the theoretical form (18) is in each case given by a line of greater slope than the diagonal, resulting in a negative coefficient for the term linear in z.

Not included in this representation of the observational material are a number of effects which require some discussion, as they affect the coefficient of the term linear in z, and must be evaluated before we can apply the empirical results to a determination of the kinematical parameter $\ddot{R}_0/H^2 R_0$ appearing in the theoretical formula (18). The first of these is the so-called aperture effect, which arises from the fact that a relatively smaller extent of the more distant nebulae is measured than of the nearer ones. This correction slues each line about in a counterclockwise sense by about $0{\cdot}2\ m$ at its extremity, thus further increasing the non-linearity of the velocity-distance relationship. Next an estimate of the rate of change $\dot{M}$ of the absolute magnitude of an average nebula is required, in order to determine the constant appearing in the theoretical relation. SANDAGE estimates, by appeal to the theory of stellar evolution for systems of population II, that $\dot{M}$ is of the order $0{\cdot}3\ m$ per billion years. Yet another correction is required to allow for the influence of the STEBBINS-WHITFORD effect. the observed greater color index in light from the more distant nebulae. Although a definitive treatment of this must await the results of WHITFORD's current studies, the results so far obtained lead SANDAGE to conclude that this effect just cancels the contribution due to $\dot{M}$ for the photographic case, and has no influence on the photovisual results. Finally, there is the influence of a possible uniform absorbing medium; lacking an independent estimate of its amount, we can only say that its contribution to μ, if any, would be negative.

SANDAGE's conclusions, on applying these various corrections to the observations, is that from the photographic data the parameter $\ddot{R}_0/H^2 R_0$ cannot exceed -3.0, and that from the photovisual it cannot exceed $-2{\cdot}2$, with a probable error due to the curve-fitting of the order of $\pm 0{\cdot}8$. Taking the mean of these two results, we may tentatively say that

$$\frac{\ddot{R}_0}{H^2 R_0} = -2{\cdot}6 \pm 0{\cdot}8\,. \tag{19}$$

I have here treated in some detail only the velocity-distance relation, but there are others which merit attention. One of these is the number count exploited by HUBBLE in his work during the 1930s, which considers the number $N(m)$ of nebulae observed out to given apparent magnitudes m. Into this count the parameter $\ddot{R}_0/H^2 R_0$ enters in a second order

term, together with the curvature k/R_0^2 of space and terms depending on $\ddot{M}$ as well as on μ. Because of this complication, and because of the extreme sensitivity of the relation to density fluctuations, there seems little hope at present of getting more than a rough numerical check in this order. More promising is the possibility that we can get an empirical value of the parameter μ from the first order term, into which it enters in the coefficient $\mu - 1$ of z.

In the early days SLIPHER and others sought a measure of distance in the apparent diameter of a typical nebula. This method was supplanted later by HUBBLE's luminosity criteria, which characterize the present-day approach to the problem of determining the distance scale, and which in the hands of BAADE and of SANDAGE has resulted in the value of H used above. But BAUM has recently revived the possibility of obtaining cosmological parameters from the photometric measurement of diameters of nebulae, or even more promising of homologous clusters of nebulae [7]. From these we may be able to obtain an independent estimate of the distance scale, and therefore of the value of HUBBLE's constant.

Part III: The Physical Model

There remains the problem of choosing a specific model for the universe, one which will represent its past and its future as well as its present state. From the observations alone we can at most hope to get the present value of some of the kinematical parameters, such as the redshift constant H, the specific acceleration $\ddot{R}_0/R_0$ and the present value of the spatial curvature k/R_0^2. But what is required for a complete model is the full course of $R(t)$ in time, as well as the sign k of the curvature of space; this we can only get on augmenting the observational data by the imposition of physical law.

The greatest difficulty which has beset the finding of a suitable physical model in which the redshift is interpreted as DOPPLER effect rests on the fact that the earlier distance scales led to a HUBBLE constant so large that the resulting short time scale was in contradiction with the age inferred from other data. Thus HUBBLE's own value for H around 530 km/sec per megaparsec leads, without *ad hoc* assumptions, to an upper limit of 1·8 billion years for the age of the universe, whereas there is ample evidence that the earth itself must be older than that, and that the solar system and the galaxy must be at least twice as old.

One way out of the difficulty which has appealed to some is to assume that the nebular universe is on the whole static, and that some hitherto unknown effect causes a degradation of light in travelling great distances,

simulating the DOPPLER effect. The simplest assumption would be that the action responsible followed the same law as absorption, resulting in a redshift distance relation of the form

$$\frac{(\lambda + \Delta\lambda)}{\lambda} = e^{r/a}, \quad or \quad z = e^{r/a} - 1 .$$

As remarked by WHITROW [8], the expansion

$$z = \frac{r}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 0^3$$

can then be checked against the observations to test the validity of this type of hypothesis. Expressed in the form (18), this expansion becomes

$$m = \text{const.} + 5 \log z - 1{\cdot}086\, z + 0^2 \ ;$$

the coefficient $-1{\cdot}086$ of z is then to be compared with the values $-2{\cdot}2$, $-1{\cdot}6$, obtained from the linear term in the empirical results before discussed on applying the indicated corrections. Considering the uncertainties in the reduction, it is seen that such an *ad hoc* explanation of the redshift cannot be rejected on the basis of present observations.

Another attempt of interest to avoid the short time scale is to assume, with HOYLE and with BONDI and GOLD, that the universe is in a steady state, and that the loss of matter in any fixed volume due to the expansion is compensated by the continuous creation of matter uniformly throughout the universe. A dynamical model of this kind must be based on the case $k = 0$, $\xi(t) = e^{t/b}$, equation (98), where the time b is to be identified with the inverse of the HUBBLE constant. Here the quantity $\ddot{R}/H^2R$ assumes the constant value $+1$; this model is therefore inconsistent with the value $-2{\cdot}6$ of this parameter indicated by the observations. It is also at variance with the STEBBINS-WHITFORD effect, as in a steady state model there should be no systematic variation of nebular characteristics with distance. But we may look forward to hearing more concerning this theory, as well as that which JORDAN and his colleagues have been developing, in the course of this Conference.

With the longer time scale indicated by the work of BAADE and of SANDAGE, the distress is not so acute. The resulting value of $1/H$ of 5·4 billion years, obtained by extrapolating the present rate of expansion backward in time, appears to be of the right order of magnitude. True, gravitation, the only relevant universal force of which we have independent knowledge, tends to reduce this figure by an amount depending on the mean density of matter, for the retarding effect of the attraction will require greater nebular velocities in the past, and therefore allow a shorter time in which to reach the present state.

In order to examine this situation, I propose now to consider the models obtained on imposing the field equations of EINSTEIN'S general relativity theory of gravitation – but briefly, as we are here on ground which has been trod quite thoroughly in the past. As stated at the outset, the only parameter which I shall take as given is the HUBBLE constant characterising the leading term of the velocity-distance relationship, and I shall provisionally retain the debatable cosmological constant Λ to allow a greater choice of models. Assuming, as seems justified by what we know concerning the material and energetic content of our neighbourhood of the universe, that the pressure due to radiation and to the kinetic effects of matter are negligible at the present epoch, EINSTEIN'S field equations reduce for these models to the single first-order differential equation

$$8\,\pi\,G\,\varrho_0\,\xi_0^3 = -\Lambda\xi^3 + 3\xi\,(\dot{\xi}^2 + k)\,, \tag{20}$$

where G is the Newtonian constant of gravitation and ϱ_0 is the present mean density of matter. The present 'age of the universe', for those models which state out in the singular state $\xi = 0$ at time $t = 0$, is then given by the integral

$$t_0 = \int\limits_0^1 \frac{x^{1/2}\,dx}{\left[\frac{8\,\pi\,G}{3}\,\varrho_0\,(1-x) + H^2 x^3 - \frac{k}{\xi_0^2}\,x\,(1-x^2)\right]^{1/2}} \tag{21}$$

from which Λ has been eliminated with the aid of the equation obtained from (20) for the present epoch t_0. In principle the integrand should be modified in the earlier stages, during which the radiation is of relatively greater importance, but the effect of this on t_0 can be neglected for the present purposes without substantial error.

The general nature of the dependence of the physical model on the two physical parameters ϱ_0 and t_0 is given graphically in Figure 4. Models for which $\Lambda = 0$ are represented by points on the dashed curve, which asymptotically approaches the value $t_0 = 1/H$ as the density ϱ_0 decreases. Points above this curve represent models in which $\Lambda > 0$; for these the cosmological constant acts like a repulsive force varying directly with the distance parameter and tending to counteract the gravitational deceleration. Of particular interest is the point

$$\varrho_0 = 6{\cdot}2 \times 10^{-29}\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\,, \qquad t_0 = 3{\cdot}6 \times 10^9\,\text{yr}\,, \tag{22}$$

representing an EINSTEIN-DE SITTER universe in which both Λ and the curvature of space vanish. The signs of Λ and of the curvature, and the nature of the solution – whether oscillating or monotonically expanding – corresponding to a given pair of values ϱ_0, t_0 can be read directly off the diagram.

So far as our present knowledge of density and time scale go, it would seem possible to choose a physical model of the idealized universe in which the disreputable $\Lambda = 0$, although in order to get a large enough t_0 for the evolutionary processes we would have to keep to fairly small values of the density ϱ_0. But now comes the rub: accepting the value of the second-order term in the velocity-distance relationship indicated by the recent

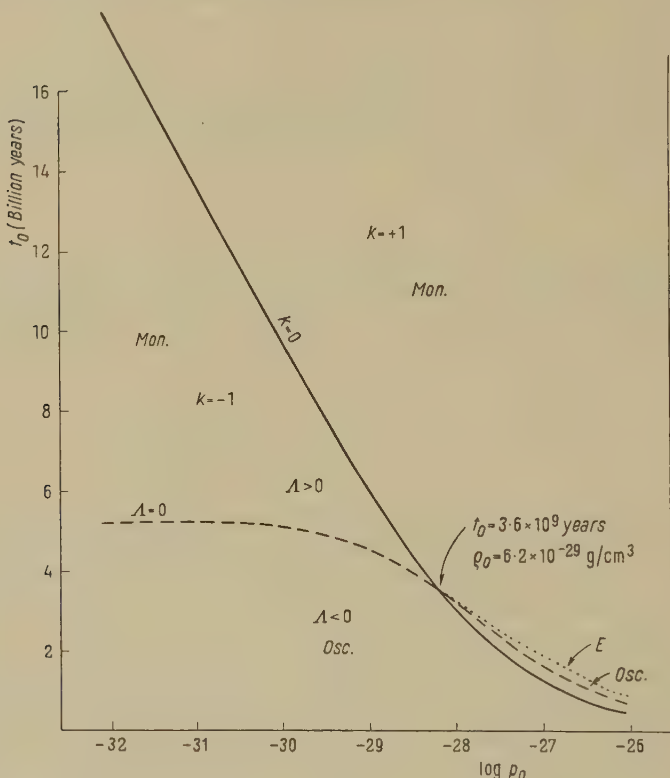

Fig. 4

survey, we are lead to such high values of ϱ_0 that we are forced to reintroduce $\Lambda > 0$ in order to save the time scale, and this in itself drives the density still higher. To show this, we go to the second-order equation obtained by differentiating (20), eliminate k between the two, and obtain an equation connecting ϱ_0 with $\ddot{\xi}_0/\xi_0$. On substituting in the resultant the value (19) obtained from the survey, we find that

$$\varrho_0 > \frac{3H^2}{4\pi G}\left(2{\cdot}7 + \frac{\Lambda}{3H^2}\right) = 3{\cdot}3 \times 10^{-28}\left(1 + \frac{\Lambda}{8{\cdot}1\,H^2}\right) \tag{23}$$

But this means that if we put $\Lambda = 0$ then t_0 would be pushed down to around 2·5 billion years and we are forced to resurrect Λ to save the time scale.

With this brief glance at the models offered by EINSTEIN's general relativity theory of gravitation, I conclude my survey of cosmological theory. I make no special plea for any definite one of these models as best representing the physical universe in this, the crudest of all pertinent approximations, nor do I even insist that the model must be one chosen from this general relativistic set. It is enough to have shown that the class of kinematical models presented in Part I is prescribed by the very essence of the cosmological problem on imposing the maximum uniformity compatible with the large-scale observations, and to have shown in Part III that the general theory of relativity does lead to models adequate to portray the present semi-quantitative knowledge, presented in Part II, of the universe at large.

Diskussion – Discussion

V. FOCK: I should like to ask whether the formula you have used for $m - M_0$ is in agreement with that which follows from FRIEDMANN's solution, namely

$$\frac{r H}{c} = y + \frac{1}{2} y^2$$

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = y + \frac{b}{4} y^2$$

where

$$b = \frac{8 \pi \gamma \varrho}{3 H^2} .$$

H. P. ROBERTSON: My formula is of course only an approximate one. If your 'r' is distance as inferred from apparent magnitude, then the two formulae agree to the approximation I am considering.

O. HECKMANN: The existence of GÖDEL's solution proves that there exists an 'absolute' rotation in the theory of relativity.

H. P. ROBERTSON: I am afraid that is correct. The entire material field in his solution must be judged to be in rotation. I consider it a defect in the field equations of the general theory of relativity that they allow such a solution.

O. HECKMANN: Could you please explain somewhat more fully the term μ considering a secular change in nebular luminosity. Do you know how SANDAGE has computed the term?

H. P. Robertson: This was inferred by Sandage from work on the theory of stellar evolution for systems of population II, by Schwarzschild and others. Sandage's own work on the globular cluster M 3 provided his estimate that the M 3 stars are about 5 billion years old.

J. Ehlers: You started with the assumption that the manifold of events is homogenous and isotropic. Therefore, you get only those models which have a cosmic time-coördinate the lines of which are orthogonal to the three-space. In connection with Gödel's model I am interested in the question: Are there arguments by which it is possible to exclude such models with an intrinsic rotation in which it is impossible to have such a time-coördinate?

H. P. Robertson: I am not aware of any argument which could enable one to exclude such models *a priori*. They do not appear among the models I discussed because I imposed both homogeneity and isotropy; Gödel's solution is homogeneous but not isotropic.

Bibliography

[1] H. P. Robertson, *Kinematics and World-Structure*, Astrophys. Journ. *82*, 284 (1935).
[2] E. A. Milne, *Relativity, Gravitation and World-Structure* (Oxford Univ. Press, 1935).
[3] H. Bondi, *Cosmology* (Cambridge Univ. Press, 1952)
[4] H. P. Robertson, *On the Foundations of Relativistic Cosmology*, Proc. Nat. Acad. Sci. *15*, 163 (1929).
[5] E. P. Hubble, *The Realm of the Nebulae* (Yale Univ. Press, 1936).
[6] H. P. Robertson, *The Apparent Luminosity of a Receding Nebula*, Zeits. f. Astrophys. *15*, 69 (1938).
[7] H. P. Robertson, *The Theoretical Aspects of the Nebular Redshift*, Pub. Astron. Soc. Pac. *67*, 82 (1955).
[8] G. J. Whitrow, *On the Interpretation of the Extragalactic Red-Shifts*, Mon. Not. R. A. S. *114*, 180 (1954).

On the Eddington Relations and their Possible Bearing on an Early State of the System of Galaxies

by O. KLEIN (Stockholm)

Although astrophysical observations may require new laws of nature for their interpretation the arguments for such laws sought in the so called cosmological postulate and similar considerations seem to me very little convincing and more in line with aristotelian physics than with the general trend of science. Although arguments of beauty or simplicity are certainly of great importance in the search for new elementary laws, where the need of such laws is apparent, as in meson and nuclear physics, they are hardly at their place when we are concerned with a particular state of a large system. The following is an attempt to make use of EDDINGTON'S numerical relations, which have given rise to so much speculation of the kind just mentionned, as a starting point for a further inquiry with the history of the system of galaxies using only the well known laws of nature. This attempt is made on the following hypothetical assumptions about an early state of the system before the HUBBLE expansion had begun:

1. The system consisted of a thin, enormous hydrogen gas cloud, finite and limited in the ordinary sense of the word, in a quasistationary state under the influence of radiation pressure (exerted by means of THOMSON scattering of radiation of comparatively high frequency by the hydrogen atoms) and gravitation. The system of galaxies according to these assumptions is thus regarded just as one big stellar system, not as the entire world.

2. The system approached the highest degree of expansion compatible with the quasistationary state, namly that the mean free path of a proton was approaching its linear dimensions. This leads to the relation

$$\frac{\varrho_0}{m_p} \times \frac{8\pi}{3} d^2 R_0 \gtrsim 1 \,.$$

Here R_0 is the radius of the cloud, ϱ_0 its average density, m_p the proton mass and $d = e^2/m_e c^2$ the radius of the electron, m_e being the electron mass and e the elementary charge.

3. The system approached the highest mass compatible with its dimensions on general relativity theory. By means of the well-known SCHWARZSCHILD solution this implies

$$\frac{2\gamma M_0}{c^2 R_0} \gtrsim 1 ,$$

where M_0 is the mass of the cloud, γ the gravitational constant and c the vacuum velocity of light.

From the two inequalities which we shall give the form

$$\frac{8\pi}{3} \times \frac{8\varrho_0 R_0^2}{c^2} = \lambda , \qquad \frac{8\pi}{3} d^2 \frac{\varrho_0}{m_p} R_0 = \frac{1}{\mu} \tag{1}$$

where λ and μ are two positive fractions, we get

$$\begin{aligned} R_0 &= \lambda\mu \frac{e^2}{\gamma m_e m_p} d = \lambda\mu \times 6{\cdot}3 \times 10^{26}\ \mathrm{cm} \\ \varrho_0 &= \frac{1}{\lambda\mu^2} \times \frac{3}{8\pi} \times \left(\frac{e^2}{\gamma m_e m_p}\right)^{-1} \times \frac{m_p}{d^3} = \frac{1}{\lambda\mu^2} \times 4 \times 10^{-27}\ \mathrm{g/cm^3} \\ M_0 &= \frac{\lambda^2\mu}{2}\left(\frac{e^2}{\gamma m_e m_p}\right)^{-1} = \lambda^2\mu \times 4 \times 10^{54}\, g = \lambda^2\mu \times 2 \times 10^{11}\, M_s . \end{aligned} \tag{2}$$

Here M_s is the mass of the sun. Rewriting (2) in the form

$$\left(\frac{4\pi}{3} \times \frac{\varrho_0 R_0^3}{m_p}\right)^{1/2} = \frac{1}{\lambda\mu}\frac{R_0}{d} = \sqrt{\frac{\lambda^2\mu}{2}} \times \frac{e^2}{\gamma m_e m_p} \tag{3}$$

and assuming that the factors containing λ and μ do not deviate by any order of magnitude from unity we have the EDDINGTON relations with the difference that in them the quantities refer to the present condition of the world. The value (2) of ϱ_0, however, agrees better with an earlier, more condensed state of the system of galaxies than with the present state.

There is one more relation, which in this connection is often taken as the definition of the world radius, namely that it should correspond to the value c for the redshift velocity. Combined with the first relation (1) and with ϱ and R referring to the present state of the system of galaxies this gives

$$\frac{8\pi}{3}\gamma\varrho T^2 \approx 1 , \tag{4}$$

where T is the reciprocal HUBBLE constant. Taking BAADE's new value $T = 5{,}4 \times 10^9$ years, (4) gives

$$\varrho \approx 6{\cdot}7 \times 10^{-29}\ \mathrm{g/cm^3},$$

which agrees well with HOYLE's new value. Now, as is well known, (4) expresses approximately the condition for curvature 0, which for a finite, approximately Newtonian system means that it is just about able to expand to infinity. For this we may find an interpretation by means of the hypothesis that the gas cloud is a stage in the condensation of cold, extremely thin hydrogen gas through the action of gravity, the radiation present in the cloud considered above being due to ionisation by collisions followed by radiative recapture of electrons.

Observational Tests in Cosmology

by F. HOYLE (Cambridge)

I should like to follow Dr. BAADE and Dr. ROBERTSON in discussing the relation of observation to theoretical cosmology. It is convenient to divide my remarks into two categories, one relating to cosmological observations, and the other to cosmogonic developments. The cosmological observations can be subdivided within themselves, first into observations that refer to a significantly different time to the present – where we are looking back so far along the light cone that the time of transit of the light from the object in question is a significant fraction of HUBBLE's constant (which Dr. BAADE gave as about $5{\cdot}4 \times 10^9$ years). In this subdivision we may include the determination of HUBBLE's constant itself and the problem of nebular counts. These issues have been so fully dealt with by Dr. BAADE and Dr. ROBERTSON that I shall pass them by with just one remark. The extreme difficulty of making accurate nebular counts by optical methods has been emphasized. It is perhaps worth noting that the counting of discrete sources of radio emission may turn out to be a considerably easier matter. And if, as seems likely, the majority of these discrete sources correspond to a special class of galaxy, then it may prove possible to derive valuable cosmological information from 'radio counts'.

Now let us consider an example of the second subdivision of the cosmological type of observation, the subdivision corresponding to observations that relate to times that do not differ appreciably from the present. It seems probable that our Local Group is not expanding, that it is a bound cluster of galaxies. It seems to me a fair inference from this that the average density of matter in the universe must be less than the mean density within the Local Group. I would expect that any cosmological theory would explain the non-expansion of the Local Group in these terms – i.e. that the Local Group is non-expanding because the density of matter within it exceeds the average for the universe. Now the mean density within the Local Group can be estimated with quite good accuracy. It is in the neighbourhood of 5×10^{-29} gm/cm^3. It therefore seems

unlikely that the average density of matter throughout space can exceed this value.

I now come to my second main division, to the cosmogonic type of development. This may include cosmogonic theory as well as observation. Let me consider one important example. The observed colour-magnitude diagrams of the Type II stars, together with the theory of stellar structure, are sufficient for a quite precise estimate to be made of the ages of the Type II stars. And since these are the oldest stars we presumably get thereby an estimate for the age of our Galaxy. Although present investigations are clearly susceptible of much improvement we already know sufficient to say that the answer cannot be much different from five or six thousand million years. If we combine this with Dr. BAADE's value of $5{\cdot}4 \times 10^9$ years for the expansion constant we arrive at a rather crucial statement: that we cannot accept any point-source cosmology in which there has been an appreciable slowing down of the expansion of the universe – we must confine our attention to the markedly hyperbolic cases.

Cosmogonic considerations of this sort are capable of further development. It should eventually be possible to deduce the ages of Type II stars in other galaxies with nearly the same accuracy that we can for our own galaxy. Then it will be possible to decide such important cosmological questions as whether all galaxies are of nearly the same ages, or of widely different ages.

My impression is that our knowledge of cosmology is likely to advance as much from cosmogonic considerations as it is from the more widely known cosmological type of observation.

Diskussion – Discussion

G. JÄRNEFELT: Wäre es nicht sehr wünschenswert diejenigen Beobachtungstatsachen, die zu der Behauptung, daß die mittlere Dichte im Weltraum etwa $5 \cdot 10^{-29}$ g/cm^3 ist, irgendwann möglichst explizit darzustellen?

The steady-state Theory of Cosmology and Relativity

by H. Bondi (London)

In the first instance I should like to draw attention to how scientific cosmology has become. The cosmological papers today have all dealt with empirical tests of cosmological theories and nobody has referred to how satisfying or how beautiful or how logical this or that theory is. A few years ago, the emphasis would probably have been the other way round.

My second point follows on from this and concerns the criteria of what a theory should do. The absence of a complete and complex mathematical apparatus in the steady-state theory has been deplored. This attitude seems to me to be incorrect. The only legitimate demand to be made is that a theory should enable predictions to be made that can be checked observationally. If such predictions can be made without cumbersome mathematical apparatus, then this is at least as good as if a mathematical theory is required.

Thirdly I should like to comment on a point emerging from the earlier papers. It has been stressed that theoretically homogeneity is a much more fundamental property than isotropy, which is added on at a late stage. However, from an observational point of view isotropy is much more easily established than homogeneity which is generally taken to follow from the observed isotropy by rejecting any spherically symmetrical system centred on us. It would be very difficult to establish by observational means the homogeneity of an anisotropic universe.

Finally I want to elaborate in some detail the problem of the observational tests of the steady-state theory. My partiality for this theory is largely due to the definite and rigid nature of its observational predictions. This vulnerability makes it an exceptionally useful and fertile theory.

There are four tests that to me seem to be most significant and most likely to lead to decisive results.

(i) *The Stebbins-Whitford effect* (and its generalizations). In these tests the properties of distant and near galaxies are compared, suitable pro-

perties being colour, shape, degree of clustering, structure, etc. Since the light now received from distant regions was emitted there a long time ago, we see distant galaxies in the state they were in long ago. According to the steady-state theory, this is irrelevant since this theory states that average properties do not change with time. On any evolutionary theory changes may however be expected to occur.

The difficulty in these tests is that the light of distant galaxies is not only weaker than the light of near ones, but also shifted to the red. Before any comparisons can be made these factors must be accounted for. STEBBINS' and WHITFORD's early work is not sufficiently comprehensive to allow the effects of red-shift and faintness to be deducted unambiguously, but I was very glad to hear from Dr. BAADE that new work is now in progress. This work is concerned with the colour of galaxies. Any systematic change of colour with distance, over and above that due to red-shift, would disprove the steady-state theory, while the absence of such a change could be taken to favour the steady-state theory.

(ii) *The ages of galaxies.* Once it becomes possible to estimate the age of a galaxy from its structure it should be possible to see whether the distribution of ages among galaxies corresponds to the distribution demanded by the steady-state theory (a wide distribution with numerous young galaxies) or is more in accordance with evolutionary theories, with the relatively narrow age distribution appropriate to them.

(iii) *The origin of the heavy elements.* In evolutionary theories this is generally (though not necessarily) ascribed to special conditions during the initial period of existence of the universe, whereas in the steady-state theory it is required that heavy elements are now being generated in sufficient quantity to account for their observed abundances. This has hitherto been a difficulty for the theory, but the recent work of CAMERON and FOWLER shows that heavy elements are being produced in fairly common types of stars. If this process can be shown to be sufficient, an argument in favour of the 'big-bang' origin will have disappeared.

(iv) *The condensation of the galaxies.* Both in relativistic cosmologies and in the steady-state theory the galaxies are supposed to have condensed from more uniform matter. In both theories, efforts have been made to study the condensation process so as to see whether the observed masses, radii, shapes, angular momenta, degree of clustering etc. can be inferred from the condensation process.

The problem is however entirely different in the two theories, for whereas in the stationary model of the steady-state theory every galaxy condenses in the presence of other galaxies, in the relativistic models at least one (and possibly many) galaxies must have formed before others existed. There are indications that this process required in relativistic

cosmology may be able to occur only on the basis of very special assumptions or possibly not at all. In spite of a good deal of work, this problem has still not been solved.

The corresponding steady-state problem has however been tackled and largely solved by D. W. Sciama, who has found that the process will lead to the observed degree of clustering and has also explained some other properties of the galaxies.

In this problem, as in several others, the steady-state theory leads to more fruitful theoretical problems, since it has to be shown that present conditions are self-perpetuating, whereas in evolutionary theories an explanation of present features almost invariably involves the postulating of special initial conditions.

Stetige Vektorfelder in der linearen Feldtheorie

von W. Scherrer (Bern)

Die *lineare Feldtheorie* (vgl. Zeitschrift f. Physik *138*, 1954, *139*, 1954, *140*, 1955, *141*, 1955) gründet sich auf 4 absolut invariante lineare Differentialformen

$$\dot{g}_\lambda = g_{\lambda,\mu}\, \dot{x}_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

im vierdimensionalen Zeitraum x_0, x_1, x_2, x_3.

Um einschlägige kosmologische Lösungen zu erhalten empfiehlt es sich von der Tatsache Gebrauch zu machen, daß im dreidimensionalen Riemannschen Kugelraum überall stetige Vektorfelder existieren.

Eine Basis für derartige Vektorfelder erhält man durch folgende Festsetzungen:

$$g_{0,0} = 1\,; \quad g_{0,k} = g_{i,0} = 0\,; \qquad (i, k = 1.\ 2, 3) \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{1,1} &= L \sin\vartheta \cos\varphi \\ g_{1,2} &= L \sin\Theta\,(\cos\Theta \cos\vartheta \cos\varphi + \sin\Theta \sin\varphi) \\ g_{1,3} &= L \sin\Theta \sin\vartheta\,(\sin\Theta \cos\vartheta \cos\varphi - \cos\Theta \sin\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{3_1}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{2,1} &= L \sin\vartheta \sin\varphi \\ g_{2,2} &= L \sin\Theta\,(\cos\Theta \cos\vartheta \sin\varphi - \sin\Theta \cos\varphi) \\ g_{2,3} &= L \sin\Theta \sin\vartheta\,(\sin\Theta \cos\vartheta \sin\varphi + \cos\Theta \cos\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{3_2}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{3,1} &= L \cos\Theta \\ g_{3,2} &= -L \sin\Theta \cos\Theta \sin\vartheta \\ g_{3,3} &= -L \sin\Theta \sin\vartheta \sin\Theta \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{3_3}$$

Dabei bedeuten Θ, ϑ und φ die beim kosmologischen Problem gebräuchlichen Winkel und

$$L = L(x_0) \tag{4}$$

stellt den zeitlich veränderlichen Weltradius dar.

Wählt man die an anderer Stelle (vgl. speziell Zeitschrift f. Physik *140*, § 1, 1955) definierte Wirkungsfunktion

$$W \equiv \Lambda_0 + \Lambda_2 W_2 + \Lambda_3 W_3 \tag{5}$$

mit

$$\begin{aligned} W_2 &\equiv a_\alpha f^{\alpha\varrho,}_{\sigma,} f^{\alpha\sigma,}_{\varrho,} \\ W_3 &\equiv a_\alpha f^{\alpha\varrho,}_{\varrho,} f^{\alpha\sigma,}_{\sigma,} \end{aligned} \tag{6}$$

so erhält man für jede Wahl der Kombinationszahlen $\Lambda_0, \Lambda_2, \Lambda_3$ eine eindeutig bestimmte Lösung durch die Differentialgleichung

$$L' = A + B \cdot L^2 \tag{7}$$

mit

$$A = \frac{8\Lambda_2}{\Lambda_2 + 3\Lambda_3}\,; \qquad B = \frac{4\Lambda_0}{\Lambda_2 + 3\Lambda_3} \tag{8}$$

Da unter den angegebenen Voraussetzungen das Feld überall homogen und singularitätenfrei ist, entsprechen die damit angegebenen Lösungen formal der leeren Welt de Sitters.

Speziell im Falle $\Lambda_2 + \Lambda_3 = 0$ resultiert genau die de Sitter-Welt. Dies ist deshalb bemerkenswert, weil sich für diesen Fall auch genau die Schwarzschildsche Lösung ergibt.

Über die Hypothese einer Veränderlichkeit der sogenannten Gravitationskonstante

von P. JORDAN (Hamburg)

Die Theorie der *veränderlichen* Gravitations-„Konstanten“ $\varkappa = 8\,\pi\, f/c^2$ hängt eng zusammen mit der fünfdimensionalen Relativitätstheorie. Deshalb sei dieser zunächst eine kurze Betrachtung gewidmet. Es handelt sich hier im Grunde nicht etwa um eine spekulative Abänderung der EINSTEIN-MAXWELLschen Theorie, sondern um die Aufdeckung mathematischer Eigenschaften dieser Theorie. (Der nachfolgende Bericht stützt sich auf die soeben erschienene, stark veränderte zweite Auflage meines Buches „Schwerkraft und Weltall“ (Braunschweig 1955), bringt jedoch auch einige neue Ergebnisse.)

Es sei eine n-dimensionale RIEMANNsche Mannigfaltigkeit mit $n > 3$ gegeben: $x^{(\nu)}$ mit $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$; und es sei die Aufgabe gestellt, speziell solche $g_{\mu\nu}$-Felder zu untersuchen, welche konstant in bezug auf die Koordinate $x^{(o)} = x_0$ sind:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_0} = g_{\mu\nu|0} = 0\,. \tag{1}$$

Für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ schreiben wir:

$$\gamma_{kl} = g_{kl} - \frac{g_{k0}\, g_{l0}}{g_{00}}\,; \tag{2}$$

und ferner definieren wir

$$F_{kl} = \left(\frac{g_{l0}}{g_{00}}\right)_{|k} - \left(\frac{g_{k0}}{g_{00}}\right)_{|l}. \tag{3}$$

Dann sind die n-dimensionalen Vakuum-Feldgleichungen

$$\text{RICCI-Tensor} \quad R_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

gleichwertig mit

$$\left.\begin{aligned} G_{jm} + \frac{\sqrt{g_{00}}_{|j||m}}{\sqrt{g_{00}}} + \frac{1}{2} g_{00} F_{jk} F_{m}^{\cdot k} = 0\,; \qquad & \text{(a)} \\ \sqrt{g_{00}}^{|j}{}_{||j} - \frac{1}{4} \sqrt{g_{00}^{3}}\, F_{jm} F^{jm} = 0\,; \qquad & \text{(b)} \\ \left(\sqrt{g_{00}^{3}}\, F^{jm}\right)_{||m} = 0\,. \qquad & \text{(c)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hier ist G_{jm} der Ricci-Tensor der $(n-1)$ dimensionalen Metrik (2); und die kovarianten Ableitungen und die Indexverschiebungen (Herauf- und Herunterziehen) in (5) beziehen sich ebenfalls auf (2).

Diese bekannte Umformung kann, abgesehen von der Methode forcierten Formelrechnens, auf zwei Wegen erhalten werden. Einer dieser Wege führt über den Formalismus der *projektiven* Relativitätstheorie[1]), die wir mathematisch als eine elegante Art der Herleitung dieser Formeln betrachten dürfen – es spielt dabei keine Rolle, welchen Wert n der Dimensionszahl wir voraussetzen. Ein anderer Weg führt über den Cartanschen Formalismus; daß auch hiermit die Herleitung sehr elegant vollzogen werden kann, hat mir J. Ehlers gezeigt.

Für den Spezialfall $F_{kl} = 0$ ist also

$$\left.\begin{aligned} G_{jm} + \frac{\sqrt{g_{00}}_{|j||m}}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,; \qquad & \text{(a)} \\ \sqrt{g_{00}}^{|j}{}_{||j} = 0\,. \qquad & \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diese Gleichungen (6) erlauben eine bemerkenswerte Vereinfachung. Nach Schücking betrachten wir die konform abgeänderte $(n-1)$-dimensionale Metrik

$$\bar{\gamma}_{kl} = g_{00}^{\varepsilon} \cdot \gamma_{kl}\,. \tag{7}$$

Der zugehörige neue Ricci-Tensor $\bar{G}$ ist mit $\omega = g_{00}^{\varepsilon}$ gegeben durch

$$\bar{G}_{kl} = G_{kl} + \frac{n-3}{2}\left(\frac{\omega_{|k||l}}{\omega} - \frac{3}{2}\,\frac{\omega_{|k}\,\omega_{|l}}{\omega^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\,\frac{\omega^{|j}{}_{||j}}{\omega} + \frac{n-5}{4}\,\frac{\omega^{|j}\,\omega_{|j}}{\omega^2}\right)\gamma_{kl}\,; \tag{8}$$

die in (8) gebrauchten kovarianten Ableitungen und Indexverschiebungen beziehen sich wiederum auf (2).

[1]) Vgl. dazu a. a. O. Kap. III.

Für

$$\varepsilon = \frac{1}{n-3} \tag{9}$$

vereinfacht sich (8) wegen (6b) zu

$$\left.\begin{aligned} \bar{G}_{kl} &= G_{kl} + \frac{n-3}{2}\left(\frac{\omega_{|k||l}}{\omega} - \frac{3}{2}\,\frac{\omega_{|k}\,\omega_{|l}}{\omega^2}\right) \\ &= G_{kl} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_{00|k||l}}{g_{00}} - \frac{2n-5}{2n-6}\,\frac{g_{00|k}\,g_{00|l}}{g_{00}^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

also (6a) zu

$$\bar{G}_{kl} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2n-5}{2n-6}\right)\frac{g_{00|k}\,g_{00|l}}{g_{00}^2}\,. \tag{11}$$

Mit

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}\,\frac{n-2}{n-3}\,; \\ \ln g_{00} &= u \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ergeben sich also folgende Gleichungen (SCHÜCKING $n=5$, EHLERS $n=4$):

$$\boxed{\bar{G}_{jm} = a\,u_{|j}\,u_{,m}}\,. \tag{13}$$

Hieraus folgert man nach SCHÜCKING[1])

$$u^{|j}{}_{||j} = 0\,, \tag{14}$$

wobei *jetzt* die kovariante Differentiation und die Indexverschiebung *in der Metrik* (7) gemeint ist:

$$\left(\sqrt{\pm\bar{\gamma}}\cdot\bar{\gamma}^{jl}\,\frac{g_{00|l}}{g_{00}}\right)_{|j} = 0\;; \tag{15}$$

$$\bar{\gamma} = Det\,|\bar{\gamma}_{kl}| = g_{00}^{(n-1)\varepsilon}\,Det\,|\gamma_{kl}| = g_{00}^{(n-1)\varepsilon}\,\gamma\,. \tag{16}$$

Das bedeutet:

$$\left(\sqrt{\pm\gamma}\cdot\gamma^{jl}\,\frac{g_{00|l}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{|j} = 0\,; \tag{17}$$

d. h. (6b) ist Folgerung aus (13), und somit sind die $1/2\,n\,(n-1)$ Gleichungen (13) *äquivalent* mit den $1/2\,n\,(n-1)+1$ Gleichungen (6).

---

1) Vgl. a. a. O. S. 208

Innerhalb der Theorie reiner Gravitationsfelder (im Vakuum), ohne Maxwell-Feld, können wir (5) benutzen z.B. zur Untersuchung zeitlich konstanter Felder oder andererseits axialsymmetrischer Felder. Man bekommt auf diese Weise einen sehr erleichterten Zugang zu den in der Literatur bekannten speziellen exakten Lösungen der Feldgleichungen. Hier handelt es sich also um eine Anwendung von (5) oder spezieller (6) bzw. (13) auf den Fall $n = 4$. Drei Beispiele I, II, III der Anwendung auf statische Felder seien erwähnt.

I) Aus (13) folgt dann wie J. Ehlers bemerkte, mit Hilfe der Greenschen Formel

$$\int u\, u^{|j}{}_{||j}\, dV + \int u_{|j}\, u^{|j}\, dV = \int u\, u_{|j}\, d\Omega^j$$

(mit $dV = \sqrt{-g}\, dx\, dy\, dz$) in einfacher Überlegung, ohne irgendeine Rechnung, der von Lichnerowicz [1] aufgestellte, von Thiry vereinfacht bewiesene Satz, wonach ein reguläres statisches Einsteinsches Vakuumfeld, welches asymptotisch in die Minkowski-Welt übergeht, mit der Minkowski-Welt äquivalent ist.

II) Die merkwürdige Äquivalenz zweier Gleichungssysteme mit verschiedenen Anzahlen von Gleichungen ist der Grund dafür, daß man z.B. bei Ermittlung der Schwarzschildschen Lösung aus dem Ansatz

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta \cdot d\varphi^2) \tag{18}$$

ein *überbestimmtes* System von *drei* Differentialgleichungen für die *zwei* Funktionen $\nu(r)$, $\lambda(r)$ bekommt, wenn man die vierdimensionalen Feldgleichungen $R_{\varrho\sigma} = 0$ unmittelbar zu befriedigen sucht. Eine auf dreidimensionale Gleichungen (13) gestützte Lösung ergibt von vornherein nur noch *zwei* durch $\nu(r)$, $\lambda(r)$ zu erfüllende Differentialgleichungen[1]). Sie ermöglicht übrigens auch eine Herleitung der Schwarzschildschen Lösung, in welcher man kein einziges Γ^k_{jm}-Symbol explizit zu berechnen braucht (Ehlers).

III) Eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Gleichungen (13) ergibt sich, wenn man sie für den Fall der Anwesenheit von Materie verallgemeinert. Man kann dann nach Ehlers auch folgenden Satz von Don Aufenkamp [2] in ähnlicher Weise, wie den erwähnten Satz von Lichnerowicz sehr leicht erhalten: Die Einsteinschen Feldgleichungen ohne kosmologisches Glied haben keine reguläre stationäre Lösung mit geschlossenem Raum.

[1]) Vgl. a. a. O. § 32.

Die Theorie von KALUZA und KLEIN betrachtet den Fall $n = 5$. Sie weist in bekannter Weise darauf hin, daß wir dann aus (5) durch folgende Abänderung die EINSTEIN-MAXWELLsche Theorie bekommen:

Von (5a), (5b) soll nur die Linearkombination $\sqrt{g_{00}}(a) + 1/2\, g_{jm}(b) = 0$ beibehalten werden, unter Hinzufügung der Forderung

$$g_{00} = \frac{2\varkappa}{c^2} = \text{const.} \tag{19}$$

(Im Folgenden setzen wir aber $c = 1$).

Diese Abänderung bleibt im Einklang mit den Forderungen der vierdimensionalen Koordinateninvarianz und der Eichinvarianz; die fünfdimensionale Koordinateninvarianz (4), aus der die Gleichungen (5) abgeleitet sind, ist ja ohnehin schon durch die Spezialisierung (1) verletzt.

Die durch diese Spezialisierung eingeführte Unsymmetrie kann beseitigt werden dadurch, daß man den schon erwähnten projektiven Formalismus benutzt. Er beruht darauf, daß die aus $(n-1)$dimensionalen Koordinatentransformationen und zugehörigen Eichtransformationen erzeugte Gesamtgruppe gerade isomorph ist[1]) mit der Gruppe $\mathfrak{H}_n$ der *homogenen* Transformationen von n Koordinaten X^μ $(\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$; bei diesen homogenen Transformationen sollen also die neu eingeführten X'^μ homogene Funktionen ersten Grades der X^μ sein. Definieren wir nun nach BERGMANN die X^μ durch die eingangs benutzten $x^{(\mu)}$ in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} X^\mu &= x^{(\mu)}\, e^{x_0} \quad \text{für} \quad \mu > 0\,; \\ X^0 &= e^{x_0}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

so geht die Bedingung (1) oder allgemein $A^{l_1 l_2 \cdots}_{k_1 k_2 \ldots 0}$ für zulässige Feldgrößen $A^{l_1 l_2 \cdots}_{k_1 k_2 \ldots}$ über in die Aussage, daß alle Tensorkomponenten homogene Funktionen der X^μ sind, deren Grade sich nach einer einfachen Regel bestimmen. In diesem Rahmen geht das g_{00} von (18) über in die *projektive Invariante* $J = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$.

Es erhebt sich jedoch die Frage, was entstehen würde, wenn wir in (5) – den Fall $n = 5$ voraussetzend – auf (b) *nicht* verzichten, also die Nebenbedingung (19) *nicht* einführen würden. Dann bekommen wir das, was ich kurz die „erweiterte Gravitationstheorie" nennen will – zunächst natürlich nur für den Vakuumfall, auf den wir uns bislang überall beschränkt haben. Die Vermutung, daß $\varkappa$ eine *Veränderliche* sein könnte, ist von THIRY, EINSTEIN-BERGMANN, JONSSON[2]) aus der fünfdimensionalen Relativitäts-

---

[1]) Vgl. a. a. O. § 22.
[2]) Vgl. die Angaben a. a. O. §§ 26, 27.

theorie abgeleitet worden; zuvor war sie von Dirac aus ganz anderen Gründen[1]) entwickelt.

Diese Theorie ergibt eine Reihe neuer *mathematischer Probleme*, über die ich sprechen will, ohne dabei die komplizierteren Fragen der physikalischen Deutung zu erörtern.

Wie die *Verallgemeinerung der Schwarzschildschen Lösung* in der erweiterten Theorie aussieht, wurde von Heckmann und Fricke geklärt[2]). Da hierüber schon in der ersten Auflage meines Buches berichtet ist, bespreche ich sogleich das von Schücking gelöste bzw. weitgehend reduzierte Problem der allgemeinen, *zeitabhängigen* kugelsymmetrischen Vakuumfelder. Es wird angreifbar auf Grund der Umformulierung der Feldgleichungen gemäß (13). Verstehen wir den Ansatz (18) jetzt so, daß das dortige ds^2 die Metrik (7) meint, und daß ν, λ jetzt Funktionen von r, t sind, so haben wir folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{G}_{00} &= -e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{r} - Ke^{\nu} = a\,u^2\,; \\ \bar{G}_{01} &= -\frac{\dot{\lambda}}{r} = a\,\dot{u}\,u'\,; \\ \bar{G}_{11} &= -\frac{\lambda'}{r} + K\,e^{\lambda} = a\,u'^2\,; \\ \bar{G}_{22} &= \sin^{-2}\Theta;\ \bar{G}_{33} = e^{-\lambda}\left[1+\frac{r}{2}(\nu'-\lambda')\right] - 1 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

mit

$$x^{(0)} = t, \quad x^{(1)} = r, \quad x^{(2)} = \Theta, \quad x^{(3)} = \varphi\,.$$

Dabei ist K das Gauszsche Krümmungsmaß[3]) der zweidimensionalen Metrik $e^{\nu}\,dt^2 - e^{\lambda}\,dr^2$; also

$$K = \frac{1}{2}\,e^{-(\nu+\lambda)/2}\,\{(e^{(\nu-\lambda)/2}\,\nu')' - (e^{(\lambda-\nu)/2}\,\dot{\lambda})^{\cdot}\}. \tag{22}$$

Nach Schücking ist nun festzustellen[4]): Es genügt, die Gleichung $\bar{G}_{22} = 0$ und ferner noch

$$\bar{G}_{01}^2 = \bar{G}_{00}\cdot\bar{G}_{11} \tag{23}$$

[1]) Vgl. die Erläuterung a. a. O. § 35.
[2]) Vgl. a. a. O. β 29.
[3]) Eine sehr elegante Herleitung dieser Formeln (21), (22) verdanke ich J. Ehlers.
[4]) Vgl. a. a. O. S. 220.

zu lösen; dann bekommt man u als das Linienintegral

$$u = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \left\{ \sqrt{\bar{G}_{00}}\, dt + \sqrt{\bar{G}_{11}}\, dr \right\}. \tag{24}$$

(Vorauszusetzen ist dabei, daß die gefundene Lösung zu $\bar{G}_j^j \neq 0$ führt. Der Fall $\bar{G}_j^j = 0$ kommt nur im Sonderfall der SCHWARZSCHILDschen Lösung vor.)

Die noch zu lösenden zwei Gleichungen lassen sich reduzieren auf eine einzige partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, für die Funktion $w = 2 \ln r + \lambda - \nu$; diese ist freilich recht kompliziert. Jedoch hat das Problem umfangreiche Klassen spezieller Lösungen, die sich explizit beschreiben lassen.

Die zur EINSTEINschen Theorie $\varkappa =$ const. zurückführende Spezialisierung $u =$ const. läßt aus (21), (22) den BIRKHOFFschen *Satz* ablesen, daß bei $\varkappa =$ const. *jede* kugelsymmetrische Lösung auch *statisch*, also eine SCHWARZSCHILDsche Lösung ist. Für $\varkappa \neq$ const. ist dieser Satz jedoch nicht mehr gültig.

Aus der Fülle der vierdimensionalen Metriken, die als Lösungen des betrachteten Problems auftreten, sei nur ein Beispiel erwähnt. Die DE SITTERsche Metrik, gegeben durch (18) mit

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \beta_0^2 r^2 \tag{25}$$

ist uns bekannt als Lösung EINSTEINscher Vakuum-Feldgleichungen *mit hinzugefügtem kosmologischen Glied.* Sie tritt in der jetzt besprochenen Theorie wieder auf, diesmal als Lösung von Feldgleichungen *ohne* kosmologisches Glied, aber mit $\varkappa \neq$ const.

Vor Angabe der diesbezüglichen Formeln sei erwähnt: Wenn wir die Aufgabe stellen, das Variationsproblem

$$\delta \int G \sqrt{-g}\, dx = 0\,, \tag{26}$$

aus welchem die EINSTEINschen Vakuum-Feldgleichungen entspringen, zu verallgemeinern durch Mitberücksichtigung eines dimensionsbehafteten Skalars ω, wobei aber das neue Variationsproblem seinerseits *keine* dimensionsbehaftete *Naturkonstante* enthalten soll, so ergibt sich zwangsläufig

$$\delta \int \omega^{\eta} \left(G - \zeta \frac{\omega^{|j} \omega_{|j}}{\omega^2} \right) \sqrt{-g}\, dx = 0 \tag{27}$$

mit zwei Parametern η, ζ, von denen wir $\eta \neq 0$ und $2\zeta - 3\eta^2 \neq 0$ voraussetzen wollen. Indem wir statt ω eine *Potenz* $\varkappa$ von ω einführen,

können wir den Wert von η beliebig ändern. Wir müssen $\eta = 1/2$ herstellen, wenn wir auf die Gestalt (6) der Feldgleichungen kommen wollen. Wir können aber auch $\eta = 1$ als Normalform des Variationsprinzips zugrunde legen; das ist in den Formeln meines Buches getan. Andererseits können wir die Metrik abändern durch eine PAULIsche Konformtransformation

$$g^*_{kl} = \varkappa^\tau g_{kl}; \quad \tau = \text{const.} \neq \eta, \tag{28}$$

und dadurch den Wert von ζ ändern; nur das *Vorzeichen* von $\zeta - 3/2$ bleibt dabei unveränderlich. Bis auf das Vorzeichen ist also ganz allgemein die Zurückführung auf die Gestalt (13) der Feldgleichungen möglich; diese entsprechen ihrerseits nach JUST [3] gerade dem Sonderfall $\eta = 0$ des Variationsprinzips (27). Die folgenden Angaben beziehen sich aber auf eine Schreibweise der Formeln, in welcher $\eta = 1$ vorausgesetzt und keine Normierung von ζ vorgenommen ist.

Dann ist zu (25) zu ergänzen:

$$\varkappa = \text{const.}\, e^{-3\beta_0 t}\, (1 - \beta_0^2 r^2)^{3/2}. \tag{29}$$

Als wesentlich einfacheres Problem besprechen wir noch kurz dasjenige der statischen zylindersymmetrischen Gravitationsfelder mit $\varkappa \neq \text{const.}$ Nach EHLERS ergibt sich[1]) mit Konstanten m, n, A:

$$-ds^2 = -\varrho^{n-a}\, dt^2 + \varrho^{m-a}\, (dz^2 + A^2 \varrho^n\, d\varrho^2) + \varrho^{2-a} A^2\, d\varphi^2; \quad \varkappa = \varkappa_0\, \varrho^a; \tag{30}$$

dabei muß

$$m + n + \frac{mn}{2} + \left(\zeta - \frac{3}{2}\right) a^2 = 0 \tag{31}$$

sein.

Im reinen Gravitationsvakuum bleibt es unbestimmt, ob $\varkappa$ selber oder eine Potenz davon die physikalische Bedeutung der Gravitationskonstanten hat, und ob die g_{kl} oder die konformen g^*_{kl} die Metrik bedeuten. Erst bei Übergang zu Problemen mit elektromagnetischem Feld gewinnt $\varkappa$ eine bestimmte Bedeutung, so daß der Parameter η nicht mehr beliebig normierbar ist; und erst die Mitbetrachtung von Materie legt die Metrik endgültig fest. Im Folgenden wird weiterhin $\eta = 1$ angenommen, bei unbestimmt gelassenem ζ.

Als Beispiel der dann eintretenden Verhältnisse sei erwähnt, daß die GÖDELsche kosmologische Lösung zur erweiterten Theorie in einem ähnlichen Verhältnis steht, wie die DE SITTERsche Metrik: Während die GÖDELsche Lösung in der ursprünglich gemeinten Form nur im Falle eines

---

[1]) Vgl. a. a. O. S. 209–211.

nicht verschwindenden kosmologischen Gliedes möglich ist, kann nach W. KUNDT gezeigt werden, daß sie in etwas veränderter Form bei Hinzufügung eines passenden Feldes $\varkappa$ die Feldgleichungen *ohne* kosmologisches Glied befriedigt.

Die GÖDELsche Metrik kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 + 2\,h(x_1)\,dx_0\,dx_2 + f(x_1)\,dx_2^2 - dx_3^2 \tag{32}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{x_1/b} + e^{-x_1/b}\right) - \sqrt{2}\,; \\ f &= \frac{1}{16}\left(e^{2x_1/b} + e^{-2x_1/b}\right) - \left(e^{x_1/b} + e^{-x_1/b}\right) + \frac{19}{8}\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Dabei hängt b mit dem *kosmologischen Gliede* zusammen:

$$b^2 = -\frac{1}{2\lambda}\,; \tag{34}$$

wegen $-2\,\lambda = \varkappa\,\varrho$ mußte GÖDEL $\lambda < 0$ voraussetzen. Nach KUNDT erfordert die erweiterte Theorie (ohne kosmologisches Glied) eine gewisse Abänderung der numerischen Konstanten, und vor allem eine imaginäre Größe anstelle des reellen b:

$$\left.\begin{aligned} h &= \sqrt{2\,(\zeta - 2)}\,\sin\frac{x_1}{C}\,; \\ f &= (2\,\zeta - 3)\,\sin^2\frac{x_1}{C} - 1\,; \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

dazu kommt

$$\varkappa = \varkappa_0\,e^{x_3/c}\,; \qquad C^2 = \frac{2\,\zeta - 3}{\varkappa\,\varrho}\,; \qquad \varkappa\,\varrho = \text{const.} \tag{36}$$

Zum Schluß betrachten wir ein kosmologisches Modell

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2\,d\sigma^2\,, \tag{37}$$

in welchem $d\sigma^2$ ein Raum konstanter Krümmung $+1$ ist; er sei gleichmäßig gefüllt mit druckfreier ruhender Materie. Dann liefert die erweiterte Theorie für $\eta = 1$ und $\zeta > 2$ eine recht komplizierte Differentialgleichung zweiter Ordnung für $R(t)$. Diese kann jedoch auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden, deren Lösung nach KÖNIG und SCHÜCKING ein sehr übersichtliches Bild ergibt, wenn wir eine zweckmäßige Koordinatenwahl zugrunde legen. Das verkleinert aus meinem

Buche wiedergegebene Bild, das ich H. König, Clausthal, verdanke, als Ergebnis numerischer Rechnungen seines Institutes, scheint mir auffällig schön. Auch kann wohl von der erweiterten Gravitationstheorie im Ganzen gesagt werden, daß sie trotz der noch bestehenden Ungewißheit über die empirische Rechtfertigung der These $\varkappa \neq$ const. jedenfalls auf schöne, d. h. nicht triviale, aber doch lösbare mathematische Probleme geführt hat.

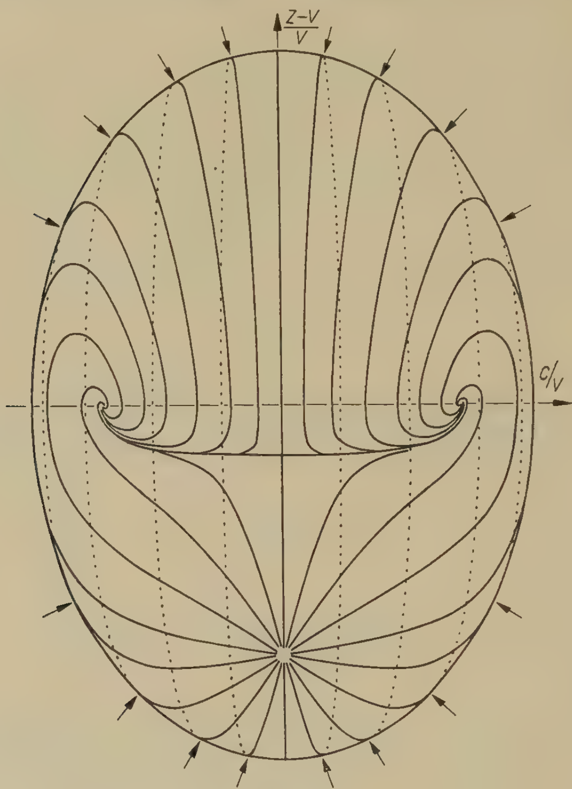

Fig. 1

Hingewiesen sei auf eine bemerkenswerte Arbeit von T. Takasu [4], welche diese Theorie zusammen mit anderen Formen einer einheitlichen Feldtheorie einem umfassenderen Schema einordnet.

Diskussion – Discussion

P. G. Bergmann: I am afraid $\varkappa$ is not the 'gravitational constant', and e and m are conserved in Jordan's theory if properly defined. By proper definition I mean that they be defined in terms of their ponderomotive effects. If we carry out an Einstein-Infeld-Hoffmann type of calcula-

tion, I believe it will turn out that precisely those quantities that are conserved, because of general covariance and because of gauge invariance, will be those that have the usual ponderomotive significance of mass and of charge, respectively. Hence the ratio e/m will remain permanently constant.

P. Jordan: Indeed it is the meaning that the atomic constants give the invariable standards of measurement. But if e/m remains constant the quotient of gravitational and electrical attractions of the two particles in the H-atom may change. The tendency of M. Lichnerowicz to speak about a variation of the dielectric constant of the vacuum rather than of a variation of $\varkappa$ seems to me to be another formulation of the same relations.

Literatur

[1] C. R. *222*, 432 (1946).
[2] C. R. *232*, 213 (1951).
[3] K. Just, Z. Physik *139*, 498 (1954).
[4] T. Takasu, Compositio mathematica *10*, 95 (1952).

Jordansche Gravitationstheorie mit neuen Feldgleichungen

von G. LUDWIG und K. JUST (Berlin)

Die von JORDAN (vorstehendes Referat) besprochenen Transformationen der Metrik und des Variations-Prinzips

$$\delta \int \varkappa^{\eta} \, (\overset{4}{R} - \zeta \cdot \varkappa^{-2} \varkappa^{|\nu} \varkappa_{|\nu}) \, d\overset{4}{\Sigma} = 0 \tag{1}$$

waren nur möglich für $\eta \neq 0$. Der deshalb von JORDAN ausgeschlossene Fall $\eta = 0$ ist jedoch nach JUST [1] durch besondere Einfachheit ausgezeichnet:

1. Die *Periheldrehung* der Planeten [2] hat nur bei $\zeta + \eta = 0$ den von der Erfahrung geforderten Einsteinschen Wert.

2. Die Fälle $|\zeta| \gg \eta^2 \neq 0$, in denen die Periheldrehung annähernd die Einsteinsche ist, widersprechen dem Prinzip von DIRAC [3], nach dem alle grundlegenden Naturkonstanten von der *Größenordnung Eins* sein sollen.

3. Im Falle $\eta = 0$ läßt sich ζ so wählen ($\zeta = -\frac{1}{2}$), daß die LAGRANGE-Funktion (nach Hinzunahme des MAXWELLschen $\varkappa F_{\nu\mu} F^{\nu\mu}$) der fünfdimensionale Krümmungs-Skalar der projektiven Relativitäts-Theorie ist:

$$d \int \overset{5}{R} \, d\overset{4}{\Sigma} = 0 \, . \tag{2}$$

4. Der Ansatz (2), der *gar keinen Parameter* mehr enthält, liefert nach Einfügung einer LAGRANGE-Funktion der Materie die Feldgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} R^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{2} \sigma^{|\alpha} \sigma_{|\beta} + \varkappa \left(T^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2} T \, \delta^{\alpha}_{\beta} \right) &= 0 \\ \text{und} \qquad \sigma^{|\nu}{}_{||\nu} = \varkappa \, b \qquad \text{mit} \qquad \sigma &= \ln \varkappa \, ; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

diese sind von der einfachsten Art, die als Erweiterung der EINSTEINschen denkbar ist.

Aus (3) folgt mit dem üblichen Ansatz der Kosmologie (Metrik räumlich homogen und isotrop, Materie mit Dichte ε und Druck p ruht im System):

$$\dot{\varrho}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\dot{\sigma}^2 + \varepsilon\varkappa\right)\varrho^2 \mp 1 \quad \text{mit} \quad \dot{\sigma} = \frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa}. \tag{4}$$

Darin gilt das obere (untere) Vorzeichen für den geschlossenen (hyperbolischen) Raum vom Weltradius ϱ; und es ist

$$\varepsilon\varkappa = 3\gamma\varrho^{-3}, \qquad \dot{\sigma} = -\nu\varrho^{-3} \tag{5}$$

mit

$$\gamma = \int \frac{b}{6\varepsilon}\frac{d\varkappa}{\varkappa} - \int \frac{p}{\varepsilon}\frac{d\varrho}{\varrho}, \qquad \nu = \int \varrho^3 \varkappa\, b\, dt. \tag{6}$$

Für Weltepochen, in denen der Druck p und das neuartige b (Quelle für die Änderung der Gravitationszahl $\varkappa$) zu vernachlässigen sind, dürfen wir γ und ν als *konstant* ansehen. Beschränkt man sich ferner auf Epochen, in denen das letzte Glied von (4) noch bedeutungslos ist (andernfalls ist die Rechnung nicht wesentlich schwerer, nur das Ergebnis weniger übersichtlich), dann folgt [4]:

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^3 = \left(1 + \frac{\tau}{t}\right)\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \tag{7}$$

und

$$\varkappa = \varkappa_0\left(1 + \frac{\tau}{t}\right)^n \quad \text{mit} \quad n = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15\,. \tag{8}$$

Falls die heutige Weltepoche im Geltungsbereich dieser Näherung liegt, sind t_0 und ϱ_0 die heutigen Werte von Weltalter und -radius (aus der Erfahrung ist t_0 gut, ϱ_0 noch gar nicht bekannt); und für die *Zeitkonstante* τ dürfen wir annehmen:

$$\frac{1}{100}t_0 < \tau < \frac{1}{10}t_0\,. \tag{9}$$

Hierin folgte die obere Schranke aus Betrachtungen von Teller [5] über die *Möglichkeit organischen Lebens* (die Temperatur der Erdoberfläche verhält sich etwa wie $\varkappa^2$); die untere Schranke ist nötig, wenn man wie Jordan [6] die *Größe des Planetensystems* durch nachträgliche Expansion erklären will.

Die zu $\varepsilon\varrho^3$ proportionale Energie eines Weltbereiches verhält sich nach (5) und (8) wie

$$E \sim \frac{\varkappa_0}{\varkappa} \approx \frac{t}{t+\tau}\,; \tag{10}$$

eine merkliche Entstehung neuer Materie erfolgte also nur in sehr frühen Epochen ($t < \tau$). Heute und in künftigen Zeiten aber ist das neue Weltmodell [4] *fast identisch* mit dem bekannten FRIEDMANNschen (ohne kosmologische Konstante), vor allem ist die Gravitationszahl (8) heute praktisch gleich der Konstanten $\varkappa_0$.

Nimmt man mit JORDAN [6] an, daß die Materie nicht kontinuierlich, sondern in Form ganzer Sterne entsteht, und deutet man als „Nachzügler" in dieser früher (bei $t < \tau$) viel dichteren Folge neuer Sterne die heutigen *Supernovae I*, so ist deren Häufigkeit mit (9) verträglich.

Die Materiefunktion b spielt nach (3) und (6) für die neue Kosmologie eine entscheidende Rolle, denn mit $b = 0$ wäre die Theorie (sobald man von $\sigma^{|\nu}{}_{||\nu} = 0$ nur die Lösung $\sigma = \text{const.}$ als physikalisch bedeutsam ansieht) völlig gleichwertig der Einsteinschen. Prinzipiell wäre b aus der LAGRANGE-Funktion der *Materiefelder* zu berechnen, die für JORDANS Theorie mit veränderlicher Gravitationszahl $\varkappa$ von LUDWIG [7] formuliert wurde. Mit der Energiedichte ε vergleichbare Werte hat b vermutlich [7] nur bei *starker Wechselwirkung* innerhalb der Materie, so daß wir für nicht zu frühe Epochen außer $p \ll \varepsilon$ auch $|b| \ll \varepsilon$ annehmen durften. Es ist jedoch *bisher nicht gelungen*, b näher zu bestimmen (nicht einmal sein Vorzeichen) oder mit beobachtbaren Effekten zu verknüpfen.

Literatur

[1] JUST, K., Z. Physik *139*, 498 (1954); *140*, 485 (1955). Siehe jedoch Z. Physik *143*, 472 (1955), wo eine andere Parameter-Wahl vertreten wird.
[2] JUST, K., Z. Physik *149*, 524 (1955). Berichtigung und Ergänzungen dazu: Z. Physik *144*, 411 (1956).
[3] DIRAC, P. A. M., Nature *139*, 323 (1937).
[4] JUST, K., Z. Physik *141*, 592 (1955).
[5] TELLER, Phys. Rev. *73*, 801 (1948).
[6] JORDAN, P., *Schwerkraft und Weltall*, § 38 (Vieweg, Braunschweig 1955).
[7] LUDWIG, G., *Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie* (Vieweg, Braunschweig 1951), Seite 71 bis 93.

Gravitational Waves

by N. Rosen (Haifa)

Let us consider first the case of a weak gravitational field, so that by a suitable choice of coordinates ($x^1, x^2, x^3, x^4 = x, y, z, t$), one can write for the metric tensor

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

where $\gamma_{\mu\nu}$ is the metric tensor of the special relativity theory, and the $h_{\mu\nu}$ are small quantities. If their squares and products can be neglected, one obtains the linear approximation of the field equations. It is well known [1] that, to describe gravitational waves travelling in the positive x-direction, one can take all the components $h_{\mu\nu}$ to vanish, except possibly

$$h_{22} = -h_{33} \neq 0 ,$$

$$h_{23} \neq 0$$

where the non-vanishing components are arbitrary functions of the argument $x - t$. One finds then that in the linear approximation there exists the possibility of plane transverse gravitational waves propagating with the speed of light. Since these involve arbitrary functions, one can have plane monochromatic, or sinusoidal, waves as a special case. These waves are analogous to the electromagnetic waves in the Maxwell theory.

The situation is quite different when one makes use of the exact gravitational field equations. It was shown some time ago [2] that the exact equations exclude the possibility of plane periodic waves, since one of the variables describing the field is not oscillatory, but rather has a monotonic behavior. If one attempts to set up a solution describing a plane wave train of infinite extent one finds that somewhere in space-time a singularity will be present. Thus it follows that there are no solutions of the exact equations corresponding to the monochromatic plane wave solutions of the linear equations.

It was suggested by H. P. Robertson [2] that the field equations set up for plane waves be reinterpreted in a cylindrical polar coordinate system (x^1, x^2, x^3, $x^4 = \varrho$, z, φ, t). In this case the singularity can be located on the polar axis, where it is unobjectionable (since it can be regarded as describing a material source), and the solutions obtained can be considered to describe cylindrical, rather than plane, waves.

By a suitable choice of coordinates one can write

$$ds^2 = -e^{2\gamma-2\psi}\, d\varrho^2 - e^{2\psi}\, dz^2 - e^{-2\psi}\, \varrho^2\, d\varphi^2 + e^{2\gamma-2\psi}\, dt^2 .$$

The field equation can then be put into the form

$$\psi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho}\, \psi_\varrho - \psi_{tt} = 0$$

$$\gamma_\varrho = \varrho\, (\psi_\varrho^2 + \psi_t^2), \quad \gamma_t = 2\, \varrho\, \psi_\varrho \psi_t ,$$

where a subscript now denotes partial differentiation. In this case oscillatory wave solutions exist. In order that solutions sinusoidal in the time should exist, it is obviously necessary that

$$\int_0^\tau \psi_\varrho \psi_t\, dt = 0 ,$$

where τ is the period. One readily verifies that this condition is fulfilled by a standing wave, but not by a progressive wave. This is sometimes explained by saying that a progressive wave carries energy, which produces a secular change in the metric.

However, it is interesting to look into the question of the energy in some detail. For this purpose we make use of the pseudo-tensor t_μ^ν which occurs in the conservation relation

$$[\sqrt{-g}\, (T_\mu^\nu + t_\mu^\nu)]_{,\nu} = 0 ,$$

where T_μ^ν is the energy-stress tensor of the matter or other non-gravitational fields. This can be written [3]

$$16\,\pi \sqrt{-g}\, t_\mu^\nu = \left\{ {\nu \atop \alpha\beta} \right\} (\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta})_{,\mu} - (\ln \sqrt{-g})_{,\alpha} (\sqrt{-g}\, g^{\nu\alpha})_{,\mu}$$
$$+ \delta_\mu^\nu \left[\left\{ {\alpha \atop \lambda\beta} \right\} \left\{ {\beta \atop \sigma\alpha} \right\} g^{\lambda\sigma} \sqrt{-g} - g^{\lambda\sigma} \left\{ {\alpha \atop \lambda\sigma} \right\} (\sqrt{-g})_{,\alpha} \right] .$$

In the case of the weak field in the form of a transverse plane wave travelling in the positive x-direction, one finds for the non-vanishing components

$$-t_1^1 = -t_1^4 = t_4^1 = t_4^4 = \frac{1}{16\pi}(\dot{h}_{22}^2 + \dot{h}_{23}^2)\,,$$

where a dot denotes differentiation with respect to the argument. On the other hand, an exact calculation in the case of the cylindrical waves gives

$$t_1^1 = t_1^4 = t_4^1 = t_4^4 = 0$$

$$t_2^2 = t_3^3 = -\frac{\varrho\,\psi_t^2}{4\pi\sqrt{-g}}\,.$$

Thus we find that the cylindrical waves carry no energy or momentum.

As a check one can use, in place of the unsymmetrical t_μ^ν, the symmetrical pseudo-tensor $t^{\mu\nu}$ proposed by LANDAU and LIFSHITZ [4], satisfying the conservation relation in the form

$$[(-g)\,(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})]_{,\nu} = 0\,;$$

and given by the expression

$$16\,\pi\,t^{\mu\nu} =$$

$$(g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma})\left[2\begin{Bmatrix}\tau\\ \lambda\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \tau\varrho\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\tau\\ \lambda\varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \sigma\tau\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\tau\\ \lambda\tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \sigma\varrho\end{Bmatrix}\right]$$

$$+ g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}\left[\begin{Bmatrix}\nu\\ \lambda\varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \sigma\tau\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\nu\\ \sigma\tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \lambda\varrho\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\nu\\ \tau\varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \lambda\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\nu\\ \lambda\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \tau\varrho\end{Bmatrix}\right]$$

$$+ g^{\nu\lambda}g^{\sigma\tau}\left[\begin{Bmatrix}\mu\\ \lambda\varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \sigma\tau\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\\ \sigma\tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \lambda\varrho\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\\ \tau\varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \lambda\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\\ \lambda\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \tau\varrho\end{Bmatrix}\right]$$

$$+ g^{\lambda\sigma}g^{\tau\varrho}\left[\begin{Bmatrix}\mu\\ \lambda\tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\\ \sigma\varrho\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\\ \lambda\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\\ \tau\varrho\end{Bmatrix}\right].$$

One finds that for the cylindrical waves

$$t^{11} = t^{14} = 0\,,$$

$$(-g)\,t^{44} = -\frac{1}{8\pi}\,.$$

Since the right-hand members do not depend on the nature of the solution, one can say that no energy or momentum is carried by the waves.

The results obtained for the cylindrical waves fit in with the conjecture [5] that a physical system cannot radiate gravitational energy, but, of course, they do not represent a proof. The fact that the exact equations do not admit solutions corresponding to plane monochromatic waves appears to raise some doubt as to the physical significance of gravitons arising from the quantization of the linear equations.

Diskussion – Discussion

M. Fierz: 1. Physikalisch ist es wohl richtiger aperiodische Lösungen der Gleichung

$$\psi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho}\psi_\varrho - \psi_{tt} = 0$$

zu betrachten, die einem einfallenden Wellenpaket entsprechen, das im Koordinatenursprung reflektiert wird. Die Metrik ist dann überall regulär. Freilich ist im Unendlichen ($\varrho \to \infty$) die Geometrie nicht die euklidische, sondern diejenige auf einer Kegeloberfläche. In diesem Sinne ist sie dort singulär.

2. Die linearisierte Theorie ist hochgradig irreführend und lehrt gar nichts über den Charakter der strengen Lösungen. Insbesondere haben die, durch Quantisierung der linearisierten Theorie abgeleiteten ,,Gravitonen" keinen Sinn.

3. Da Zylinderwellen unphysikalisch sind, sollte man Lösungen vom Typus ,,Kugelwellen" finden. Diese Aufgabe übersteigt aber meine Kunst.

V. Fock: 1. The solution that corresponds to cylindrical waves has a singularity on the axis. Is such a singularity admissible?

2. There exist spherical waves emitted by a system of bodies of total mass M. If $\alpha = \gamma M/c^2$ is the gravitational radius then the phase of the waves is

$$t - \frac{1}{c}(r - 2\alpha \lg r).$$

The amplitude contains terms of the order $1/r$ and $(\lg r)/r$. The non linear terms are also taken into account. Possibly the spherical waves have more physical significance than cylindrical ones.

N. Rosen: 1. A singularity on the axis is admissible since it can be considered as describing a physical system emitting or absorbing the wave.

2. Physically, spherical waves are much more important than cylindrical waves. However, it is necessary to obtain exact solutions of the field equations.

P. G. Bergmann: Should the linearized version of cylindrical waves not yield correct results near infinity, especially with regard to energy-momentum?

N. Rosen: The energy-momentum pseudo-tensor in cylindrical coördinates contains terms linear in the variables and these cancel the quadratic terms.

References

[1] Bergmann, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity* (New York, 1942).
[2] Einstein, A., and Rosen, N., Jour. Franklin Inst. *223*, 43 (1937).
[3] Møller, C., *The Theory of Relativity* (Oxford, 1952).
[4] Landau, L., and Lifshitz, E., *The Classical Theory of Fields* (Cambridge, Mass., 1951).
[5] Scheidegger, A. E., Rev. Mod. Phys. *25*, 451 (1953).

Problèmes généraux d'intégration des équations de la relativité

par André Lichnerowicz (Collège de France)

Je me propose, dans cette conférence, de montrer quels sont les problèmes posés par l'étude mathématique des équations relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme et d'indiquer les principaux résultats obtenus dans cette voie au cours des dernières années. Cette conférence sera consacrée principalement à la relativité générale 'classique', mais, chemin faisant, je serai conduit à montrer que les problèmes mathématiques posés par les théories unitaires, qu'elles soient du type Jordan-Thiry ou non symétriques, ne diffèrent guère de ceux concernant la relativité générale. Comme nous le verrons, les quelques faits mathématiques mis en évidence par ces théories contribuent à jeter quelques lueurs sur la difficulté fondamentale des théories unitaires: obtenir une interprétation physique précise des éléments des schémas géométriques raffinés qu'elles mettent en jeu.

J'ajouterai que l'esprit de mon exposé sera celui du physicien mathématicien.

1. La Structure des équations du champ

1. La variété espace-temps.

Dans toute théorie relativiste du champ gravitationnel, l'élément primitif est constitué par une variété «espace-temps» V_4 à 4 dimensions, douée d'une structure de variété différentiable qu'il semble désormais essentiel de préciser.

Pour des raisons étroitement liées à la covariance du formalisme et qui apparaîtront en détail par l'analyse des équations du champ gravitationnel, nous sommes amenés à supposer que dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées admissibles, les coordonnées locales d'un point dans l'un des systèmes sont des fonctions 4 fois dérivables, à jaco-

bien non nul, des coordonnées de ce point dans l'autre système, les dérivées premières et secondes étant continues, les dérivées troisièmes ou quatrièmes étant seulement continues par morceaux.

Nous traduirons ceci en disant que la variété V_4 est (C^2, C^4 par morceaux).

Sur V_4 est définie une métrique riemannienne ds^2, de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs. L'expression locale de cette métrique dans un système de coordonnées admissibles est:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad (\alpha, \beta \text{ et tout indice grec} = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{1}$$

Le „tenseur de gravitation" $g_{\alpha\beta}$ est supposé exactement (C^1, C^3 par morceaux), ce qui est strictement compatible avec la structure imposée à V_4. Toute précision globale supplémentaire de la structure différentiable ou de la métrique, au point de vue différentiabilité, doit être considérée comme dépourvue de sens physique.

L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point x de V_4 un cône réel C_x, le cône élémentaire en x. Son intérieur et son extérieur définissent respectivement pour une direction l'orientation dans le temps et l'orientation dans l'espace. Pour qu'une hypersurface Σ, définie localement par $f(x^\alpha) = 0$, soit orientée dans l'espace il faut et il suffit que

$$\Delta_1 f = g^{\alpha\beta}\, \delta_\alpha f\, \delta_\beta f > 0 \qquad \left(\delta_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right). \tag{2}$$

Si la ligne L, orientée dans le temps, est représentée par $x^i =$ const. (i et tout indice latin $= 1, 2, 3$), on a $g_{00} > 0$ et les formes quadratiques, duales l'une de l'autre, de coefficients

$$g^*_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}} \qquad g^{*ij} = g^{ij} \tag{3}$$

sont définies négatives.

La variété V_4 n'est pas topologiquement quelconque puisqu'elle admet un champ métrique de type hyperbolique normal; par recours a une métrique elliptique on voit que V_4 admet certainement un champ de directions orientées dans le temps. Les trajectoires de ce champ fournissent *un système global de «lignes de temps»*.

Lorsque des considérations topologiques sont nécessaires, on admet bien souvent, plus ou moins explicitement, que V_4 est le produit topologique d'une variété V_3 à 3 dimensions par une variété à 1 dimension, les sous-variétés facteurs de dimension 1 étant dans V_4 orientées dans le temps. Dans ce cas, pour beaucoup de problèmes, seule la topologie de V_3

importe. Les cas usuels sont ceux ou V_3 est homéomorphe à l'espace ordinaire R^3 ou bien est une variété compacte.

Les différentes hypothèses explicitées sur la métrique (1) caractérisent les métriques dites *régulières*.

2. *Les équations d'Einstein de la relativité générale*

Je désignerai dans la suite par $R_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la métrique (1) et poserai

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (R + 2 \lambda) \qquad (\lambda \text{ constante cosmologique}).$$

Les équations d'Einstein qui, dans le cadre de la relativité générale, limitent la généralité de la métrique peuvent s'écrire:

$$S_{\alpha\beta} = \chi \, T_{\alpha\beta} . \tag{4}$$

Le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$, qui joue le rôle de source du champ, décrit au mieux au point considéré de V_4 l'état de l'énergie (cas intérieur) ou bien, dans les régions non balayées par l'énergie, est identiquement nul (cas extérieur). Il généralise ainsi le second membre de l'équation de Poisson.

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$, d'origine géométrique, qui ne dépend que des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres, est linéaire par rapport aux dérivées du second ordre et satisfait aux *identités de conservation*

$$\nabla_\beta \, S_\alpha^\beta = 0 \quad (\nabla_\beta \text{ opérateur de dérivation covariante}). \tag{5}$$

Le système des équations d'Einstein présentant, comme nous allons le voir, le caractère hyperbolique normal, le premier problème que nous devons nous poser est le problème de Cauchy qui est étroitement lié au déterminisme relativiste. Nous commencerons par une étude élémentaire locale et, pour nous réduire à l'essentiel, nous n'introduirons pas de second membre et n'envisagerons que le problème de Cauchy extérieur. Son étude préalable est d'ailleurs nécessaire pour le problème de Cauchy avec second membre. Notre problème est donc le suivant: *Problème. Etant donné, sur une hypersurface Σ, les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières, déterminer en dehors de Σ les potentiels supposés satisfaire aux équations d'Einstein du cas extérieur.*

Sur Σ, représentée localement par $x^0 = 0$, les «données de Cauchy» sont les valeurs des $g_{\alpha\beta}$ et des $\delta_0 \, g_{\alpha\beta}$. Nous désignerons par $f\,(d \cdot C)$ une fonction dont la valeur sur Σ peut se déduire des données de Cauchy par des opérations algébriques et des dérivations le long de Σ.

Nous supposerons pour le moment Σ *orientée dans l'espace* ($g^{00} > 0$). Si l'on cherche à mettre en évidence, dans les équations d'EINSTEIN, les dérivées secondes $\delta_{00}\, g_{\alpha\beta}$ dont les valeurs sur Σ demeurent inconnues, on est conduit à remplacer ces équations par le système équivalent composé des deux groupes d'équations:

$$R_{ij} - \lambda\, g_{ij} \equiv -\frac{1}{2}\, g^{00}\, \delta_{00} g_{ij} + F_{ij}\,(d \cdot C) = 0 \tag{6}$$

$$S_\alpha^0 \equiv G_\alpha\,(\mathrm{d} \cdot \mathrm{C}) = 0 \tag{7}$$

Une condition nécessaire pour que le problème de CAUCHY soit possible est que les équations (7) soient satisfaites sur Σ par les données de CAUCHY. D'autre part g^{00} étant $\neq 0$, les équations (6) fournissent les valeurs sur Σ des $\delta_{00}\, g_{ij}$. Aucune équation ne contient les 4 dérivées $\delta_{00}\, g_{\lambda 0}$ et il nous faut analyser ce fait.

Notre étude purement locale a été faite dans le domaine d'un certain système de coordonnées. Mais la donnée sur Σ, dans le domaine envisagé, des données de CAUCHY laisse subsister la possibilité de changement de coordonnées conservant les valeurs numériques des coordonnées de tout point de S ainsi que les données de CAUCHY. Le changement de coordonnées

$$x^{\lambda'} = x^\lambda + \frac{(x^0)^3}{6}\left[\varphi^{(\lambda)}(x^i) + \varepsilon^{(\lambda)}\right] \qquad (\lambda' = \lambda \text{ numériquement}) \tag{8}$$

où $\varepsilon^{(\lambda)}$ est infiniment petit en même temps que x^0, répond à la question. Dans un tel changement de coordonnées, les dérivées $\delta_{00}\, g_{ij}$ ne sont pas modifiées, tandis que les $\delta_{00}\, g_{\lambda 0}$ peuvent recevoir des valeurs arbitraires. En utilisant un changement de coordonnées où les $\varphi^{(\lambda)}$ sont différents de part et d'autre de Σ, *ce qui est permis par la structure choisie pour* V_4, on peut faire apparaître ou disparaître des discontinuités éventuelles de ces dérivées secondes, discontinuités qui sont donc dépourvues de toute signification physique. Ainsi les $\delta_{00}\, g_{ij}$ sont continues à la traversée de Σ et on peut astreindre les $\delta_{00}\, g_{\lambda 0}$ à l'être aussi pour un système de coordonnées convenables.

Nous saisissons là le mécanisme qui relie la covariance du formalisme à la structure choisie pour V_4. Ceci posé, il est facile de voir que le système des équations d'EINSTEIN est en involution: si un ds^2 satisfait aux équations (6) et, *sur* Σ, aux équations (7), il satisfait aussi en dehors de Σ aux équations (7). Ceci est une conséquence immédiate des identités de conservation (5). Notre problème initial doit être ainsi partagé en deux problèmes distincts: *Problème I ou des conditions initiales.* Il consiste dans la recherche de données de CAUCHY satisfaisant sur Σ au système $S_\alpha^0 = 0$ ou système des conditions initiales. *Problème II ou problème de*

l'évolution. Il consiste dans l'intégration du système (6) pour des données de CAUCHY satisfaisant aux conditions du premier problème.

Les résultats de cette première analyse ne sont pas totalement modifiés si Σ est orientée dans le temps. Au contraire si Σ est tangente au cône élémentaire, c'est-à-dire si $g^{00}=0$, les dérivées secondes des potentiels d'une solution des équations d'EINSTEIN peuvent être discontinues à la traversée de Σ; il peut exister une infinité de solutions des équations d'EINSTEIN correspondant aux mêmes données de CAUCHY sur Σ. On reconnait là des résultats classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles concernant les *variétés caractéristiques* (ou fronts d'onde). Ainsi C_x est cône caractéristique pour les équations d'EINSTEIN et les variétés caractéristiques sont les variétés tangentes à ces cônes; ce sont les solutions de

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\,\delta_\alpha f\,\delta_\beta f = 0\,.$$

On en déduit immédiatement que les *bicaractéristiques* – ou rayons – sont les géodésiques de longueur nulle du ds^2. Celles de ces courbes qui sont issues d'un point x de V_4 engendrent les deux nappes du *conoïde caractéristique* de sommet x.

Dans le cas du problème de CAUCHY intérieur, avec un schéma fluide par exemple, une analyse analogue peut être faite, mais à (7) se trouvent substituées les équations

$$S^0_\alpha = \chi\, T^0_\alpha$$

qui relient *sur* Σ les données de CAUCHY et les éléments matériels. Le problème d'intégration concerne alors un système du type (2–3) mais avec un second membre et les équations de conservation

$$\nabla_\beta\, T^\beta_\alpha = 0\,.$$

On met en évidence trois sortes de variétés exceptionelles: les ondes de gravitation, les variétés engendrées par des lignes de courant, les ondes hydrodynamiques.

Toujours dans le cadre de la relativité générale, nous pouvons introduire le champ électromagnétique astreint à satisfaire aux équations de MAXWELL et apportant, au second membre des équations d'EINSTEIN une contribution. L'analyse du problème de CAUCHY pour les équations de MAXWELL montre que, dans le cas du vide, C_x est encore cône caractéristique pour ces équations ce qui établit l'identité des propagations des deux champs; mais ici toutes les dérivées premières du champ électromagnétique sur une hypersurface non tangente à une caractéristique, peuvent être déterminées.

3. Les équations de la théorie unitaire de JORDAN-THIRY[1])

Dans la théorie de JORDAN-THIRY, l'élément initial est constitué par une variété différentiable V_5 de classe (C^2, C^4 par morceaux) munie d'une métrique $d\sigma^2$ que je supposerai *hyperbolique normale* et admettant un groupe à 1 paramètre d'isométries de V_5, ne laissant invariant aucun point, à trajectoires homéomorphes à un cercle et orientées $d\sigma^2 < 0$.

La variété V_4 quotient de V_5 par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries est identifiée à la variété différentiable espace-temps de la relativité générale. Par passage au quotient, on déduit de la métrique de V_5 une métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ de type hyperbolique normal, une forme antisymétrique $\beta\, F_{\alpha\beta}$ ($\beta =$ const.) à différentielle extérieure nulle et un scalaire ξ intrinsèquement définis sur V_4. Volontairement, je ne discuterai pas pour le moment les interprétations physiques que l'on peut donner de ce schéma.

Comme équations de champ, on adoptera dans V_5 des équations identiques à celles de la relativité générale (4). Traduites dans V_4, ces équations s'écrivent dans le cas dit unitaire extérieur:

$$\left.\begin{aligned}
&S_{\alpha\beta} - \frac{\beta^2 \xi^2}{2}\left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, F^2 - F^\varrho_\alpha\, F_{\beta\varrho}\right] - \frac{1}{\xi}\left[\nabla_\alpha(\delta_\beta \xi) - g_{\alpha\beta}\, \Delta\xi\right] = 0\\
&\nabla_\beta(\xi^3\, F^\beta_\alpha) = 0\\
&\frac{1}{\xi}\,\Delta\xi + \frac{\beta^2\,\xi^2}{2}\, F^2 = 0
\end{aligned}\right\}$$

Pour $\xi = 1$ les 14 premières équations se réduisent aux équations du schéma champ électromagnétique pur de la relativité générale (théorie de KALUZA-KLEIN). L'analyse du problème de CAUCHY pour une hypersurface de V_5 engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries ainsi que sa décomposition sont semblables aux précédentes, les variétés exceptionnelles dans V_4 étant toujours les variétés tangentes aux cônes élémentaires $ds^2 = 0$.

4. Les équations de la théorie unitaire non symétrique[2])

Dans la théorie unitaire non symétrique, nous nous donnons, sur une variété différentiable V_4 toujours de classe (C^2, C^4 par morceaux),

1° un champ de tenseurs non symétriques $g_{\alpha\beta}$ de classe (C^1, C^3 par morceaux) à déterminant $g \neq 0$ et dont la forme quadratique associée est hyperbolique normale,

[1]) GONSETH et JUVET ont aussi étudié, dans un travail classique, une théorie pentadimensionnelle.

[2]) ( ) et [ ] sont les symboles de symétrisation et antisymétrisation.

2º une connexion affine de classe (C^0, C^2 par morceaux) dont nous désignerons par S_α le vecteur de torsion.

$R_{\alpha\beta}$ étant le tenseur de RICCI de la connexion, les équations du champ peuvent être fondées sur un principe variationnel portant sur l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3$$

et qui généralise le principe variationnel de la relativité générale. En substituant à la connexion initiale la connexion à vecteur de torsion nulle admettant le même parallélisme, on obtient les équations du champ sous une forme commode qui fait intervenir les $g_{\alpha\beta}$, la nouvelle connexion $L^\alpha_{\beta\gamma}$ et le vecteur S_α. Selon une étude due à Madame TONNELAT et à HLAVATY, l'un des systèmes partiels fournit algébriquement, sauf dans un cas exceptionnel que nous écartons, la connexion en fonction des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières. On est ainsi amené à définir le champ par l'ensemble $(g_{\alpha\beta}, S_\alpha)$ astreint aux équations.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\delta_\alpha S_\beta - \delta_\beta S_\alpha) = 0 \qquad \delta_\varrho \left(g^{[\varrho\beta]} \sqrt{|g|}\right) = 0 \tag{9}$$

où $R_{\alpha\beta}$ est maintenant relatif à la nouvelle connexion et considéré comme fonction des $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres.

L'existence d'un principe variationnel entraîne, selon un procédé classique, celle d'identités de conservation. D'autre part à l'aide du changement de coordonnées déjà utilisé en relativité générale, on peut voir sans calculs explicites qui seraient inextricables, quelles dérivées secondes relatives à une hypersurface Σ interviennent dans $R_{\alpha\beta}$. Par une étude trop longue pour être donnée ici, ces résultats permettent d'établir que le système (9) est en involution et que moyennant l'introduction d'une condition auxiliaire de normalisation de S_α, par exemple

$$\delta_\alpha \left(g^{(\alpha\beta)} S_\beta \sqrt{|g|}\right) = 0,$$

il présente la même cohérence mathématique locale que le système des équations de la relativité générale; en particulier les valeurs des $\delta_{00}\,(g^{(0\lambda)} \sqrt{g}\,)$ sur Σ ($x^0 = 0$) ne peuvent intervenir.

Le principal résultat de cette étude est que (9) admet les variétés caractéristiques définies par la forme quadratique de type hyperbolique normal de coefficients

$$l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}$$

et qui diffère de la forme quadratique interprétée par EINSTEIN comme

définissant la partie gravitationnelle. Les bicaractéristiques sont ici les géodésiques de longueur nulle de

$$ds^2 = l_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

où $l_{\alpha\beta}$ est dual de $l^{\alpha\beta}$. Un second cône défini par une combinaison linéaire $\gamma_{\alpha\beta}$ de $l_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$ apparaît aussi[1]). Cette étude conduit ainsi à penser que *c'est $l^{\alpha\beta}$ ou un tenseur proportionnel qui doit être interprété comme tenseur gravitationnel.*

2. Existence et unicité pour les équations du champ

5. Le théorème de Mme Fourès

L'étude précédente conduit naturellement à rechercher, sans hypothèses d'analyticité, des théorèmes d'existence et d'unicité au moins locaux pour les problèmes d'évolution des différentes théories. C'est là un difficile problème de la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles et c'est en vue de ce problème que Madame Fourès a étudié les systèmes du type suivant:

$$E_S \equiv A^{\alpha\beta}\, \delta_{\alpha\beta} W_S + f_S = 0 \quad (S = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

Les W sont des fonctions inconnues de 4 variables indépendantes x^α, les $A^{\alpha\beta}$ et f_S des fonctions données des W_R, $\delta_\alpha W_R$ et des x^α, la forme quadratique $A^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ est de type hyperbolique normal. Sur l'hypersurface Σ $(x^0 = 0)$ les données de Cauchy sont:

$$W_S(x^i, 0) = \varphi_S(x^i) \qquad \delta_0 W_S(x^i, 0) = \psi_S(x^i)$$

Sur le système (E_S) et les données de Cauchy *les hypothèses suivantes sont faites:*

1⁰ Dans un voisinage D_0 de Σ entourant un point y de coordonnées (y^i) et défini par $|x^i - y^i| \leq d$, φ_S et ψ_S admettent des dérivées jusqu'aux ordres 6 et 5, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz.

2⁰ Dans un domaine D défini par $|x^i - y^i| \leq d$, $|x^0| \leq \varepsilon$ et pour des valeurs des inconnues telles que:

$$|W_S - \varphi_S| \leq 1 \quad |\delta_i W_S - \delta_i \varphi_S| \leq 1 \quad |\delta_0 W - \psi_S| \leq 1,$$

a) les $A^{\alpha\beta}$ et f_S admettent des dérivées jusqu'à l'ordre 5 continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz;

[1]) Ajouté sur épreuves.

b) la forme quadratique $A^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ est de type hyperbolique normal, la variable x^0 présentant le caractère temporel et les variables x^i le caractère spatial ($A^{00} > 0$, $A^{ij} X_i X_j$ définie négative).

Sous ces conditions, Mme FOURÈS a établi que *le problème de* CAUCHY *relatif à* (E_S) *admet une solution et une seule dans un certain voisinage de* D_0. Dans le cas où les $A^{\alpha\beta}$ ne contiennent que les W et non leurs dérivées, ce qui est le cas dans les applications relativistes, une unité peut être gagnée dans tous les ordres de dérivabilité.

Il m'est impossible d'esquisser ici la longue étude qui conduit à ces résultats. Je me bornerai à dire qu'une généralisation des classiques formules de KIRCHHOFF y joue un rôle essentiel: dans le cas linéaire, ces formules expriment les valeurs des fonctions inconnues en un point x_1 voisin de D_0 à partir de leurs valeurs sur la surface du conoïde caractéristique de sommet x_1 et des données de CAUCHY dans la région de Σ intérieure à ce conoïde.

6. *Existence pour les équations d'*EINSTEIN

Les résultats précédents s'appliquent d'une manière élégante aux équations d'EINSTEIN de la relativité générale grâce à l'introduction de coordonnées *isothermes*. L'idée consiste à associer au système d'EINSTEIN une équation à une seule fonction inconnue f qui admette les mêmes caractéristiques que ce système[1]). La manière la plus simple d'y parvenir est de considérer l'équation de LAPLACE dans V_4

$$\Delta f \equiv g^{\lambda\mu} (\delta_{\lambda\mu} f - \Gamma^{\varrho}_{\lambda\mu} \delta_\varrho f) = 0 .$$

Un système (x^ϱ) de coordonnées locales dans V_4 est isotherme si les

$$F^\varrho = \Delta x^\varrho = - g^{\lambda\mu} \Gamma^{\varrho}_{\lambda\mu} \tag{10}$$

sont nuls pour tout ϱ. On montre aisément, en particulier à l'aide du théorème de Mme FOURÈS, qu'étant donné une hypersurface locale Σ orientée dans l'espace, elle peut toujours être envisagée comme variété coordonnée $x^0 = 0$ d'un système de coordonnées isothermes.

Les quantités F^ϱ interviennent d'une manière simple dans l'expression des composantes du tenseur de RICCI. On a en effet identiquement

$$R_{\alpha\beta} \equiv - G_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} \tag{11}$$

[1]) La théorie et l'interprétation des coordonées isothermes sont dues à GEORGES DARMOIS.

avec

$$G_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} \tag{12}$$

et

$$L_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} \delta_\beta F^\mu + g_{\beta\mu} \delta_\alpha F^\mu) \tag{13}$$

les $H_{\alpha\beta}$ désignant des polynomes par rapport aux $g_{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ et à leurs dérivées premières. C'est la structure des $R_{\alpha\beta}$ ainsi mise en évidence que nous allons exploiter. Pour simplifier les écritures, nous nous limiterons aux équations sans constante cosmologique.

Considérons donc dans V_4 une hypersurface Σ portant les données de Cauchy. Sur Σ $(x^0 = 0)$ ces données satisfont à

$$(S_\alpha^0)_{x^0=0} = 0\,. \tag{14}$$

De plus, comme nous nous proposons d'utiliser des coordonnées isothermes relativement à la métrique cherchée, nous supposerons, sans nuire à la généralité, qu'elles satisfont à

$$(F^\mu)_{x^0=0} = 0\,. \tag{15}$$

Nous nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité du problème de Cauchy pour le système d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} \equiv -G_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} = 0$$

dont les premiers membres sont liés par les identités de conservation. Les stades du raisonnement sont les suivants.

1° *Résolution du problème de Cauchy pour le système* $G_{\alpha\beta} = 0$. Ce système est du type de Mme Fourès; nous ferons donc les hypothèses suivantes dans un voisinage D_0 de Σ.

a) Les données de Cauchy $g_{\alpha\beta}$ et $\delta_0 g_{\alpha\beta}$ admettent des dérivées partielles jusqu'aux ordres 5 et 4 continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz.

b) Sur Σ la forme $g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ est de type hyperbolique normal avec $g^{00} > 0$ et $g^{ij} X_i X_j$ définie négative. Sous ces conditions, le problème de Cauchy pour les $G_{\alpha\beta} = 0$ admet une solution unique au voisinage de D_0, solution qui admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 4 continues et bornées.

2° *La solution trouvée vérifie les conditions d'isothermie.* En effet de (14) et (15) il résulte

$$(\delta_0 F^\mu)_{x^0=0} = 0\,.$$

D'autre part pour toute solution de $G_{\alpha\beta}=0$, les identités de conservation se réduisent aux équations

$$g^{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta}F^{\mu}+P^{\mu}(\delta_{\alpha}F^{\varrho})=0$$

où P^{μ} est linéaire par rapport aux $\delta_{\alpha}F^{\varrho}$, les coefficients étant des polynomes en $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières. Ce système est du type de Madame Fourès et l'unicité du probleme de Cauchy correspondant entraîne $F^{\mu}=0$.

Ainsi la solution trouvée des $G_{\alpha\beta}=0$ est une solution du système d'Einstein $R_{\alpha\beta}=0$ compatible avec les données de Cauchy et rapportée à des coordonnées isothermes. Nous avons ainsi obtenu un théorème local d'existence pour le système d'Einstein, sans hypothèse d'analyticité.

7. *Unicité pour les équations d'Einstein*

Il est clair que l'unicité du problème de Cauchy pour le système d'Einstein doit être entendue dans un sens tout à fait différent de l'unicité usuelle, celle qui intervient ici, par exemple pour le système $G_{\alpha\beta}=0$. Nous entendons, pour le système d'Einstein, l'unicité *modulo un changement de coordonnées conservant les valeurs numériques des coordonnées de tout point de Σ ainsi que les données de Cauchy sur Σ*. En ce sens, il est permis de parler d'«unicité physique».

Pour établir cette unicité physique, il faut montrer que toute solution du problème de Cauchy relatif aux $R_{\alpha\beta}=0$ peut se déduire, par un changement de coordonnées satisfaisant aux hypothèses précédentes, de la solution unique du même problème pour les $G_{\alpha\beta}=0$. L'existence d'un tel changement de coordonnées fait encore intervenir un système du type de Madame Fourès, ce qui établit l'unicité cherchée. Cette unicité avait été antérieurement établie par Stellmacher à la suite des travaux de Friedrichs et Hans Lewy.

J'ai développé ici méthodes et résultats pour les équations de la relativité générale. Cette méthode peut être adaptée, sans difficultés majeures, à la théorie de Jordan-Thiry. Au contraire les théorèmes analogues pour la théorie unitaire non symétrique présentent des difficultés liées aux propriétés des «coordonnées isothermes» dans cette théorie.

3. Modèles d'univers et Problèmes globaux

8. *Modèles d'univers en relativité générale*

Les études précédentes étaient purement locales, mais en fait les problèmes mathématiques fondamentaux de toute théorie relativiste du champ doivent être de nature essentiellement globale.

Je me limiterai d'abord à la gravitation et à la théorie de la relativité générale [1]). La question qui se pose est la suivante: *quand avons-nous effectivement résolu un problème de gravitation?*

Je propose d'appeler *modèle d'univers* une variété V_4 munie d'une métrique partout régulière, satisfaisant aux équations d'EINSTEIN des différents cas et éventuellement à des conditions asymptotiques. Au voisinage des hypersurfaces, orientées dans le temps, séparant les régions balayées par l'énergie des régions vides, il doit exister, conformément à nos axiomes généraux, des coordonnées locales admissibles telles qu'à la traversée des hypersurfaces, les potentiels correspondants et leurs dérivées premières soient continus, les dérivées secondes étant discontinues.

C'est lorsqu'il est possible de construire un tel modèle d'univers que le champ extérieur peut être considéré comme *effectivement produit* par les différentes masses ou distributions énergétiques en mouvement et c'est le raccordement des champs intérieurs des différentes distributions avec un même champ qui assure *l'interdépendance des mouvements*. Ce qu'on nomme le principe des géodésiques est un corollaire aisé de ce fait et l'outil fondamental est au fond *la continuité, à la traversée de* Σ $(x^0 = 0)$ *des quantités* S_a^0.

Seul un tel modèle d'univers est susceptible d'interprétation physique. Dans un domaine Δ_0 de V_4 où elle n'est pas régulière, une métrique n'est susceptible d'aucune interprétation. On devra, pour chercher à aboutir à un modèle d'univers, voir s'il est possible de *meubler* un tel domaine, c'est-à-dire de choisir une hypersurface Σ limitant un domaine Δ contenant Δ_0 et de construire dans Δ une distribution énergétique et une métrique reliées par les équations d'EINSTEIN, la métrique étant partout régulière dans Δ et se raccordant le long de Σ avec la métrique précédemment donnée. Il est à noter qu'un tel problème est de nature essentiellement globale et présente quelque analogie avec des problèmes classiques en hydrodynamique. Sur la solution de tels problèmes, on ne sait à peu près rien.

Dans un modèle d'univers, au sens où nous l'avons défini, il devrait être impossible d'introduire de nouvelles distributions énergétiques dont les métriques associées se raccordent avec le champ extérieur. On doit donc étudier la validité, en relativité, de la proposition suivante: *L'introduction de distributions énergétiques dans un champ extérieur donné ne peut s'effectuer que dans des domaines où ce champ n'est pas régulier* (proposition A).

Etroitement liée à cette proposition est la suivante: *Un modèle d'univers constitué par un champ extérieur partout régulier doit être trivial c'est-à-dire localement euclidien* (proposition B).

[1]) en l'absence de constante cosmologique pour simplifier.

L'introduction d'un champ électromagnétique en relativité générale ou la théorie de JORDAN-THIRY conduisent à des concepts et à des énoncés analogues en ce qui concerne l'ensemble des deux champs.

De telles propositions ne semblent pas valables sous les axiomes généraux que j'ai indiqués, comme le montrent des contre-exemples un peu tératologiques. Mais, comme nous allons le voir, elles sont valables pour des champs stationnaires et par suite pour des champs suffisamment voisins de champs stationnaires, ce qui apparaît comme rassurant.

Une définition de ce qu'on nommerait un modèle d'univers en théorie unitaire non symétrique n'a jamais été donnée. Si l'on veut éviter l'introduction artificielle de sources – et c'était manifestement la volonté d'EINSTEIN – il conviendrait de faire passer, si j'ose dire, au second membre et d'interpréter physiquement certains termes des équations de champ, les nouveaux premiers membres satisfaisant encore à des conditions de conservation. Dans cette voie, rien de valable n'a encore été fait.

9. Problèmes globaux pour des champs stationnaires

En relativité générale, un champ est stationnaire si la variété riemannienne V_4 admet un groupe à 1 paramètre d'isométries à trajectoires orientées dans le temps (lignes de temps). La métrique peut s'écrire:

$$ds^2 = \xi^2 \left[(dx^0)^2 + 2\,\varphi_i\, dx^0\, dx^i\right] + g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j$$

où les potentiels sont indépendants de la variable temporelle x^0 ($\xi^2 = g_{00} > 0$). Ces hypothèses correspondent physiquement à un état de régime permanent.

Je suppose de plus, bien que ce ne soit pas strictement nécessaire, que V_4 est homéomorphe au produit topologique d'une variété à 3 dimensions par une ligne, les variétés-facteurs W_3 de V_4 pouvant être représentées par $x^0 = \text{const.}$, les lignes facteurs étant les lignes de temps. Les W_3 sont munies de la métrique définie négative de coefficients:

$$g^*_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}\,.$$

Par des calculs locaux on établit sur W_3

$$\xi\, R^0_0 = \operatorname{div}^* h \tag{16}$$

$$\Delta^* \xi = \frac{\xi^3}{2} H^2 \quad \text{(pour un champ extérieur)} \tag{17}$$

$$\xi\, \varphi_i\, R^i_0 = \frac{\xi^3}{2} H^2 - \operatorname{div}^* p \tag{18}$$

où h et p sont des vecteurs de W_3 ne dépendant que des potentiels et de leurs dérivées premières et où $H^2 = 0$ exprime que la congruence des lignes de temps est une congruence de normales pour des sections d'espace.

A l'aide de (16) on établit aisément la proposition A pour des champs stationnaires. En ce qui concerne la proposition B, on suppose W_3 compacte ou admettant un domaine à l'infini avec comportement asymptotique euclidien; sa démonstration utilise alors les relations (17) et (18) et procède par réduction du cas du champ stationnaire au cas du champ statique, au sens de LEVI-CIVITA, c'est-à-dire à $H^2 = 0$. Les résultats ainsi obtenus s'étendent sans difficultés au cas où il y a un champ électromagnétique ou à la théorie de JORDAN-THIRY.

Il ne peut exister, en l'absence de constante cosmologique, de modèle d'univers stationnaire à W_3 compact. Pour un modèle d'univers stationnaire à domaine à l'infini pour lequel les lignes de courant à l'intérieur des masses coïncident avec les lignes de temps, on peut déduire par intégration de (18) que $H^2 = 0$ partout. Il en résulte en particulier que les postulats usuellement introduits pour la formation du modèle d'univers de SCHWARZSCHILD sont surabondants.

10. *Approximations et équations du mouvement*

Si beaucoup des problèmes rigoureux de la théorie de la relativité semblent dépasser nos forces, il est possible de traiter par approximations le problème du mouvement de n masses gravitantes.

On suppose les coordonnées choisies isothermes, la métrique quasi-euclidienne et à comportement asymptotique euclidien et on développe les potentiels selon les puissances de c^{-2}. A la technique initiale d'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN qui use d'une représentation des masses par de pures singularités du champ extérieur, représentation qui pourrait être fallacieuse, il est préférable de substituer une technique où le tenseur d'impulsion-énergie joue son rôle. Une telle technique qui donne des résultats satisfaisants a été amorcée par FOCK et par PAPAPETROU, et a été développée plus rigoureusement par Madame HENNEQUIN. Les équations du mouvement des masses proviennent essentiellement de l'intégration, dans les tubes balayés par celles-ci, de divergences suggérées par les premiers membres des conditions de conservation, de manière à exprimer que les quantités S_α^0 sont nulles au bord de ces tubes.

Je n'entrerai pas dans le détail de cette technique, mais je signalerai que le même procédé vient d'être appliqué aux équations de la théorie de JORDAN-THIRY et que les approximations obtenues suggèrent l'interprétation suivante qui diffère de celle initialement donnée par les auteurs de la théorie: avec les notations du § 3, c'est $\overline{ds}^2 = \xi\, ds^2$ qui représente

la métrique gravitationnelle; le champ électromagnétique est représenté par l'ensemble des deux tenseurs proportionnels

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \qquad \bar{H}_{\alpha\beta} = \xi^3 F_{\alpha\beta}$$

où F est à différentielle extérieure nulle et où ξ^3 joue le rôle d'un pouvoir diélectrique du vide. Dans le cas unitaire extérieur les équations du champ s'écrivent avec la métrique $\overline{ds}^2$:

$$\bar{S}_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} = \frac{\beta^2}{2} \bar{\tau}_{\alpha\beta}$$

$$\bar{\nabla}_\beta(\bar{H}^\beta_\alpha) = 0$$

$$\bar{\Delta} \log \xi + \frac{\beta^2}{2} (\bar{F}, \bar{H}) = 0$$

où les $K_{\alpha\beta}$ ne dépendent que des dérivées premières de log ξ et où $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique

$$\bar{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \bar{F}_{\lambda\mu} \bar{H}^{\lambda\mu} - \bar{F}_{\alpha\varrho} \bar{H}^\varrho_\beta \, .$$

Le facteur de gravitation $\beta^2/2$ est alors constant.

Nous avons cherché à passer en revue les thèmes mathématiques proposés par les équations relativistes du champ. Beaucoup de travail reste à faire.

Diskussion – Discussion

D. van Dantzig: 1. Les équations de gravitation n'étant pas linéaires, le cône des bicaractéristiques dépendra en général de la solution considérée. Est-ce qu'il est connu sous quelles conditions on peut être sûr que, en prolongeant une solution locale, la signature de g_{ij} sera conservée, plus spécialement que le cône des bicaractéristiques ne sera pas dégénéré?

2. Est-ce que la solution à données de Cauchy peut être représentée au moyen d'intégrales ordinaires, soit sur le cône, soit au dedans du cône (ou une combinaison des deux), ou est-ce que des difficultés du type de Hadamard, où l'on doit prendre la „partie finie" d'une intégrale infinie, sont inévitables?

Mme Y. Fourès-Bruhat: 1. On ne sait pas, dans le cas général, sous quelles conditions on peut prolonger une solution donnée. Ceci résoudrait d'ailleurs le problème de l'existence de solutions globales régulières, problème dont il serait trés important de connaître la réponse, mais certainement trés difficile.

2. La solution est obtenue par résolution d'équations intégrales (portant sur des intégrales ordinaires prises sur le cône des bicaractéristiques) par approximations successives. La solution dépend des données initiales interieures au cône (propagation par ondes, en général diffusées).

Mme A. TONNELAT: Je voudrais faire observer qu'il est possible aussi de définir des systèmes de coordonnées isothermes dans la théorie non symétrique ($g^{\mu\nu}\ \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} = 0$). Leur emploi devrait conduire à un grand nombre de simplifications. Néanmoins, à ma connaissance, aucune application sérieuse de ce choix de coordonnées n'a été proposé.

Bibliographie

Les différents mémoires d'EINSTEIN et de ses collaborateurs et EINSTEIN et PAULI Ann. of Math. *44*, p. 131–138 (1943).

BERGMANN, P. G., *Introduction to the theory of relativity.*, Prentice Hall, New-York (1950).

DARMOIS, G., *Les équations de la gravitation einsteinienne*, Mém. Sc. Math., Paris (1927).

FOURÈS, MME Y., Acta Math. *88*, p. 141–225 (1952).

HADAMARD, J., *Leçons sur la propagation des Ondes* (Hermann, Paris 1903).

HENNEQUIN, MME, *Différentes notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (1954 et 1955).

HILBERT, D., Math. Ann. *92*, p. 1–32 (1924).

JORDAN, P., Ann. Physik *32*, p. 219 (1947).

LICHNEROWICZ, A., *Problèmes globaux en mécanique relativiste* (Hermann, Paris, 1939); C. R. Acad. Sc. *222*, p. 432 (1946). *Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* (Masson, Paris 1955).

RACINE, CH., *Le problème des n corps en théorie de la relativité* (Thèse, Paris 1934).

STELLMACHER, K., Math. Ann. *115*, p. 136–152 (1938).

THIRY, Y., C. R. Acad. Sc. *226*, p. 216 et 1881 (1948), Journ. math. p. et appl. *30*, p. 275–396 (1951).

La solution générale des équations d'Einstein

$g_{\underset{+-}{\mu\nu};\rho} = 0$

par Mme M. A. TONNELAT (Paris)

1. Au moyen d'un principe variationnel, la théorie d'EINSTEIN-SCHROEDINGER permet de déduire d'une densité

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) \qquad\qquad \mathfrak{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}$$

deux groupes d'équations. Le premier – le seul auquel nous nous intéressons ici – découle des variations $\delta\,\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ de la connexion affine. Il peut toujours se ramener aux 64 équations

$$\mathfrak{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\varrho} = 0. \tag{1}$$

Pour ne pas restreindre *a priori* la généralité du problème, nous allons considérer ici l'ensemble des 64 équations (1) en supposant qu'elles se rapportent à une connexion tout à fait quelconque. Soit $\Delta^{\varrho}_{\mu\nu}$ cette connexion.

Les équations (1) s'écrivent encore

$$g_{\underset{+-}{\mu\nu};\varrho} \equiv \partial_{\varrho} g_{\mu\nu} - \Delta^{\sigma}_{\mu\varrho} g_{\sigma\nu} - \Delta^{\sigma}_{\varrho\nu} g_{\mu\sigma} = 0\,. \tag{2}$$

La solution de ces équations doit expliciter complètement la valeur de la connexion affine en fonction des champs $g_{\mu\nu}$ et de leur derivées premières.

Nous avons donné en 1949—51 la solution générale des équations (2). Depuis, plusieurs auteurs se sont attaqués à ce problème sans avoir eu

connaissance de nos résultats et sans parvenir, semble-t-il, à une solution tout à fait explicite en fonction du tenseur fondamental.

2. Ecrivons la décomposition du tenseur $g_{\mu\nu}$ en parties symétrique et antisymétrique sous la forme suivante:

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu} \tag{3}$$

et appelons g, γ et φ les déterminants formés par les $g_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$; $g g^{\mu\nu}$, $\gamma\gamma^{\mu\nu}$ et $\varphi\varphi^{\mu\nu}$ les mineurs relatifs à ces mêmes éléments.

La connexion affine quelconque $\Delta^{\varrho}_{\mu\nu}$ peut s'écrire

$$\Delta^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ {\varrho \atop \mu\,\nu} \right\}_{\gamma} + u^{\varrho}_{\mu\nu} + \Delta^{\varrho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \tag{4}$$

et comprend 3 parties.

a) La première $\left\{ {\varrho \atop \mu\,\nu} \right\}_{\gamma}$ représente les symboles de CHRISTOFFEL formés avec la partie symétrique $\gamma_{\mu\nu}$ du tenseur fondamental. C'est donc une quantité connue.

b) La seconde $u^{\varrho}_{\mu\nu}$ désigne le reste de la partie symétrique de la connexion affine. Elle s'exprime complètement de la manière suivante en fonction de la partie antisymétrique

$$u^{\varrho}_{\mu\nu} = -\gamma^{\varrho\sigma} \left(\varphi_{\mu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\smile}{\nu\sigma}} + \varphi_{\nu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\smile}{\mu\sigma}} \right). \tag{5}$$

Tout revient donc finalement à déterminer les 24 coefficients antisymétriques $\Delta^{\varrho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$.

c) Les coefficients antisymétriques $\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\,\varrho} = \gamma_{\varrho\sigma} \Delta^{\sigma}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ ont l'expression suivante en fonction du tenseur fondamental:

Introduisons tout d'abord la divergence cyclique:

$$\varphi_{\mu\nu\varrho} = \partial_\mu \varphi_{\nu\varrho} + \partial_\varrho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\varrho\mu} \tag{6}$$

et aussi la divergence

$$f^{\lambda} = \gamma^{\lambda\sigma} f_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\underset{\smile}{\lambda\mu}} \right) \tag{7}$$

cette dernière quantité étant nulle ($f_\lambda = 0$) quand on part du tenseur de RICCI.

Définissons ensuite la quantité suivante:

$$
\begin{aligned}
R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = & -\frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\varrho} + \nabla_{\varrho}\varphi_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\,\overset{*}{\varphi}_{[\mu\nu]\varrho} + \frac{\sqrt{\varphi}}{4\sqrt{-\gamma}}\,\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}\varphi^{\sigma\tau}\varphi_{\sigma\tau\varrho} \\
& -\varphi_{\mu\nu}\,\partial_{\varrho}\log\frac{g}{\gamma} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varphi^{\lambda\sigma}\,\partial_{\lambda}\log\frac{g}{\gamma} - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}}\,\overset{*}{\varepsilon}_{[\mu\nu]\varrho\lambda}\varphi^{\sigma\lambda}\,\partial_{\sigma}\log\frac{g}{\varphi} \\
& + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\,\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}\,\partial_{\varrho}\log\frac{g}{\varphi} \\
& + \gamma^{\sigma\lambda}\Big\{\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}(f_{\lambda}-\bar{\bar{f}}_{\lambda}) + \varphi_{\lambda\varrho}\big[\varphi_{\mu\nu}(f_{\sigma}-\bar{\bar{f}}_{\sigma}) + \varphi_{\sigma\mu}(f_{\nu}-\bar{\bar{f}}_{\nu}) + \\
& \qquad + \varphi_{\nu\sigma}(f_{\mu}-\bar{\bar{f}}_{\mu})\big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

où ne figurent que des quantités connues, ∇_{ϱ} désignant la dérivation covariante écrite avec les symboles $\left\{ {\varrho \atop \mu\nu} \right\}_{\gamma}$. Les astérisques et barres représentent

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\gamma^{\varrho\lambda}\gamma^{\sigma\pi}\varphi_{\lambda\pi} \\
\overset{*}{\varphi}_{[\mu\nu]\varrho} &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\gamma^{\sigma\pi}\varphi_{\tau\pi\varrho} \\
\bar{\bar{f}}_{\varrho} &= \varphi_{\varrho\sigma}\gamma^{\sigma\lambda}\varphi_{\lambda\tau}\gamma^{\tau\mu}f_{\mu}\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Les mêmes notations avec astérisques et barres sont introduites pour la quantité $R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$, c'est à dire

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{R}_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}\gamma^{\lambda\sigma}\gamma^{\tau\pi}R_{\underset{\smile}{\sigma\pi},\varrho} \\
R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\bar{\bar{\varrho}}} &= \varphi_{\varrho\sigma}\gamma^{\sigma\lambda}\varphi_{\lambda\pi}\gamma^{\pi\tau}R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\tau}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

et l'on peut définir

$$
S_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = \left(2-\frac{g}{\gamma}+\frac{\varphi}{\gamma}\right)R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\,\overset{*}{R}_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} - R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\bar{\bar{\varrho}}}\,. \tag{11}
$$

Dans ces conditions la partie antisymétrique $\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = \gamma_{\varrho\sigma}\,\Delta^{\sigma}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ de la connexion affine s'écrit simplement

$$
(a^2+b^2)\,\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = a\,S_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} + b\,\overset{*}{S}_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} \tag{12}
$$

avec

$$
a = 2-\frac{g}{\gamma}+\frac{6\varphi}{\gamma}\,, \qquad b = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\left(3-\frac{g}{\gamma}+\frac{\varphi}{\gamma}\right). \tag{13}
$$

La connexion affine totale s'écrit donc

$$\Delta^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ {\varrho \atop \mu\,\nu} \right\}_{\gamma} - \gamma^{\varrho\sigma} \left(\varphi_{\mu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\smile}{\nu\sigma}} + \varphi_{\nu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\smile}{\mu\sigma}}\right) + \Delta^{\varrho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \tag{14}$$

$\Delta^{\varrho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ s'exprimant en fonction de $R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$, c'est à dire de quantités où figure explicitement et uniquement le tenseur fondamental.

3. Les conditions d'existence de la solution $\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ sont immédiates. Si l'on suppose, comme il est naturel de le faire, $\gamma \neq 0$, ces conditions se réduisent à

$$g(a^2+b^2) = g\left[\left(2-\frac{g}{\gamma}+6\,\frac{\varphi}{\gamma}\right)^2 - 4\,\frac{\varphi}{\gamma}\left(3-\frac{g}{\gamma}+\frac{\varphi}{\gamma}\right)^2\right] \neq 0\,. \tag{15}$$

4. Examinons rapidement l'application de cette solution générale à 3 cas particuliers:

a) Si $\varphi_{\mu\nu}=0$, les quantités $R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ donc $S_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ donc $\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ sont identiquement nulles et la connexion se réduit à la valeur purement riemannienne

$$\Delta^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ {\varrho \atop \mu\,\nu} \right\}. \tag{16}$$

Si, d'une façon moins radicale, on a $\varphi = 0$ la connexion est simplement

$$a\,\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = a\,R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} - R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\overset{=}{\varrho}} \tag{17}$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = {} & -\frac{1}{2}\,\varphi_{\mu\nu\varrho} + \nabla_{\varrho}\,\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{8\sqrt{-\gamma}}\,\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}\,\varepsilon^{\sigma\tau\lambda\pi}\,\varphi_{\lambda\pi}\,\varphi_{\sigma\tau\varrho} \\ & - \varphi_{\mu\nu}\,\partial_{\varrho}\log\frac{g}{\gamma} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{\mu\nu}\partial_{\varrho} + \varphi_{\varrho\mu}\partial_{\nu} + \varphi_{\nu\varrho}\partial_{\mu}\right)\log\frac{g}{\gamma} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda}\,\varphi_{\lambda\varrho}\left[\varphi_{\mu\nu}\,(f_{\sigma} - f_{\overset{=}{\sigma}}) + \varphi_{\sigma\mu}\,(f_{\nu} - f_{\overset{=}{\nu}}) + \varphi_{\nu\sigma}\,(f_{\mu} - f_{\overset{=}{\mu}})\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Les conditions d'existence (15) se ramènent alors aux suivantes

$$a = 2 - \frac{\gamma}{g} = 1 - \frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\varrho}\,\gamma^{\nu\sigma}\,\varphi_{\mu\nu}\,\varphi_{\varrho\sigma} \neq 0\,. \tag{19}$$

Ceci est en particulier valable dans le cas où l'on choisit un système de référence dans lequel un seul des champs — φ_{pq} ou φ_{p4} — disparaît.

b) Dans le cas particulier d'une symétrie sphérique, et si l'on choisit pour le tenseur $g_{\mu\nu}$ la forme indiquée par Papapetrou

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & w \\ 0 & -\beta & f\sin\vartheta & 0 \\ 0 & -f\sin\vartheta & -\beta\sin^2\vartheta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{20}$$

la substitution de cette forme particulière dans la solution générale conduit dans le cas statique aux valeurs de la connexion affine calculées directement par Bonnor dans ce cas particulier. Dans le cas non-statique on obtient une généralisation immédiate des valeurs trouvées par Bonnor.

Enfin la substitution des valeurs particulières dans la condition générale d'existence conduit à

$$g\left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + 4\,\frac{w^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2}\right]\left[\left(1 - \frac{w^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + 4\,\frac{w^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2}\right] \neq 0 \tag{21}$$

trouvée directement par Bonnor dans ce cas particulier. La solution particulière déterminée par Bonnor constitue donc un test convaincant pour la validité de la solution générale.

c) On peut trouver à partir de la solution générale les valeurs approchées de la connexion affine et par conséquent des équations du champ sans qu'il soit besoin de passer par une série d'approximations successives.

Si l'on se borne au 2-ème ordre d'approximation on retrouve les résultats indiqués d'une part par Einstein et Mme Kaufman, d'autre part par Schroedinger. On peut assez facilement écrire les équations au 3-ème et 4-ème ordre d'approximation.

Ceci est le travail de 1949. J'ajoute la remarque finale suivante: Les équations résolues ici

$$g_{\underset{+-}{\mu\nu};\varrho} = 0 \tag{2}$$

font intervenir la décomposition du tenseur fondamental

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Pour des raisons pertinentes, Lichnerowicz associe les grandeurs physiques de la théorie — métrique et champ électromagnétique — au tenseur contravariant $g^{\mu\nu}$ que nous écrirons

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}. \tag{3'}$$

On peut en principe, passer de la solution de (2) en $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$ à la solution de $\overset{\mu\nu}{g_{+-}}{}_{;\varrho} = 0$ en $h^{\mu\nu}$, $f^{\mu\nu}$ en utilisant les relations fondamentales entre les $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$, $h^{\mu\nu}$, $f^{\mu\nu}$. Mais ce procédé s'avère pratiquement inextricable et il est plus simple de chercher directement la solution de (2'). Ce travail a été fait par un de mes collaborateurs STAMATIA MAVRIDES et vient d'être publié. La résolution de (2') est plus pénible encore que celle de (2) mais la solution — c'est à dire l'expression de la connexion affine $\Delta^{\varrho}_{\mu\nu}$ en fonction des champs contravariants est aussi simple. Elle permet de passer aisément, soit à des solutions particulières — à symétrie sphérique ou cylindrique — exprimées en fonction des $h^{\mu\nu}$ et $f^{\mu\nu}$, soit à des valeurs approchées à quelque ordre que ce soit sans approximations successives.

Bibliographie

BOSE., S. N., Ann. of Mathematics, *59*, 1952. p. 171.
HLAVATY, Proc. Nat. Acad. Sci., *38*, 1952, p. 415 et 1952.
MAVRIDES, S., C. R. Acad. Sci. *241*, 1955, p. 173.
TONNELAT, M. A., C. R. Acad. Sci., *230*, 1950, p. 182, *231*, 1950, p. 470, 487 et 512; *239*, 1954, p. 1468; Journ. Phys. Rad. *12*, 1951 p. 81; *13*, 1952, p. 177; *16*, 1955, p. 21; La théorie du champ unifié (Gauthier Villars, 1955).

On the Definition of Inertial Systems in General Relativity

by F. A. E. Pirani (Dublin)

Since general relativity theory is covariant under general coordinate transformations, it does not exhibit any immediately obvious family of preferred coordinate systems similar to the inertial systems of special relativity theory or Newtonian mechanics. Some people are inclined to the view that no such coordinate systems can be or indeed should be defined, and hold that to attempt such a thing is against the spirit of the theory, while others (e. g. Fock) make definitions whose physical significance is obscure. At any event, since absolute space and time do not appear in general relativity as primary concepts, the concepts *uniform motion* and *non-rotation* cannot appear either, until it has made clear relative to what the motion is supposed to be uniform and non-rotating.

This can be done in two ways: (a) in terms of a single observer who refers observations to a clock measuring proper time and to a local coordinate system defined by a triad of unit vectors in each of his instantaneous 3-spaces; (b) in terms of an extended family of observers whose world lines are used as a system of reference. These two methods cannot be put into any general correspondence because the coordinate systems defined by individual observers will not in general form a holonomic system, and because the coordinate directions defined by sets of neighbouring observers will not in general subtend constant angles at one another. The first method – the description of observations relative to a single observer – seems closer to practical methods, and will form the main concern of this note.

In either formulation the concept of non-rotation can be defined either in terms of local dynamical phenomena or in terms of astronomical observations. But (essentially because of the principle of equivalence) uniform motion cannot be defined purely locally in an adequate way.

The relations between locally and extendedly defined reference frames on the one hand, and the two kinds of observations – dynamical and astronomical – on the other, are the subject of various statements of uncertain status which have appeared in the literature under the name

'MACH's principle of the relativity of inertia'. Without being concerned about which, if any, of these can properly be attributed to MACH, I shall mention several of them in order to make clear which of them is relevant here:

(1) Kinematically equivalent motions are dynamically equivalent.

(2) The gravitational field (metric tensor) is *determined* by the material content of space-time (energy-momentum tensor).

(3) In the absence of matter, space-time should necessarily be MINKOWSKIAN.

(3*) In the absence of matter, the field equations should have no solutions at all.

(4) The local reference frames in which NEWTON's laws are approximately valid (without the introduction of Coriolis or centrifugal forces) are those frames which are approximately non-rotating relative to the distant stars.

It seems to me that (1) is a statement which might be true and might be false in Newtonian mechanics, and is in fact false, while in a generally covariant theory with a two-sheeted null cone determined by the metric it is almost trivially true.

The difficulty facing (2) is that the field equations are differential equations, so that the problem of choosing boundary conditions arises. To reject boundary conditions altogether as conceptually undesirable would seem to place a very strict interpretation on the word 'determined'. The extent to which boundary conditions are required is now well understood, since the work of LICHNEROWICZ and his school. If, however, one wishes to avoid them altogether, it would appear that either one must replace the field equations by integral equations, which is hardly a practical proposition, or else introduce some kind of statistical postulate of a cosmological type.

Statement (3) has no operational basis; there cannot be any empirical content to a statement about the necessary metrical structure of an empty space-time. It may have some aesthetic appeal, but this has no empirical basis, because the fact that a region of the dimensions of the solar system is observed to be approximately MINKOWSKIAN is evidence only for the relative smallness of the gravitational constant. In a Riemannian space-time, every sufficiently small region is MINKOWSKIAN to any given approximation.

The aesthetic appeal of (3*) is more readily understood than that of (3), but neither of these statements is true of the field equations of general relativity theory.

The idea which is relevant here is (4). This is an empirical result which is felt by some to have the status of a basic principle – to constitute a test of the validity of mechanical theories. In Newtonian mechanics it is effectively a postulate. The conclusion to be reached in this note is that as far as general relativity is concerned, (4) is an accident, not a fundamental law – an empirical result which is only approximately confirmed by theory, and this only when the gravitational field is slowly varying in space and time.

In order to arrive at this conclusion it is necessary to have an acceptable definition of 'local reference frames in which NEWTON's laws are approximately valid'. It is not hard to see that for an individual observer such frames may be defined by parallel propagation along his world line of the triad of space-like vectors which constitute his local reference frame, at least if the observer is moving along a geodesic. Consider a freely falling observer P, with geodesic world line, and consider further a cloud of freely falling test particles near P with velocities which are small relative to P. The motion of these particles will be described by the equation of geodesic deviation[1]). If now a vierbein of orthonormal vectors is introduced, whose timelike member is P's 4-velocity, the spacelike members defining his local reference frame, and if the vierbein is propagated parallelly along P's world line, then the motion of nearby test particles, written in terms of the vierbein, is like that of a continuous fluid in which the circulation is a constant. If further it is supposed that the world lines of all the other particles intersect the world line of P at some instant (as if P threw out a cloud of dust particles in all directions at that instant), then the circulation is always zero, which is to say that the motion of a cloud of free test particles out from a point, referred to parallelly propagated axes, is *irrotational*. In this sense, then, parallel propagation defines a system of axes in which NEWTON's laws are approximately valid, at least for a freely falling observer. If, for example, this definition is employed for an observer with a 'circular' geodesic orbit in SCHWARZSCHILD space-time, then the axes exhibit that secular rotation known as the DE SITTER-SCHOUTEN effect.

If the orbit of P is not a geodesic, because he is subject to non-gravitational forces, then parallel propagation is unsuitable, because the space axes do not remain permanently orthogonal to the observer's world line. FERMI propagation has been proposed [1] as an alternative (which reduces to parallel propagation if the orbit becomes geodesic). PAPAPETROU's spinning test particles [2] give an interesting illustration of the fitness of this. A spinning test particle is described by its 4-velocity v^μ and by a

[1]) The following argument is based on J. L. SYNGE, Duke Mathematical J. *1*, 527 (1935).

skew tensor $S^{\mu\nu}$ representing the spin. PAPAPETROU's equations are not determinate, but if they are supplemented by the condition $S^{\mu\nu} v_\nu = 0$, whose physical meaning is just that the spin angular momentum be conserved, then $S^{\mu\nu}$ can be replaced by a spin vector $H^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} S_{\nu\varrho} v_\sigma$ lying in the instantaneous 3-space of the spinning particle, and then it follows from PAPAPETROU's equations that H^μ is of constant magnitude and satisfies the equations

$$(\delta^\mu_\nu - v^\mu v_\nu) \frac{\delta H^\nu}{\delta s} = 0 ,$$

which are exactly the equations of FERMI propagation. This is to say that the axis of a spinning test particle is fixed relative to FERMI-propagated axes.

One can investigate local dynamical behaviour in a different way by trying to define something like a FOUCAULT pendulum. One would not want to be too realistic about this, because it would involve solving the two-body problem, and introducing the constraint imposed by the suspending wire, and so on, but one can reach a plausible sort of 3-dimensional oscillator by introducing a non-gravitational force to replace the earth's gravitational field as the restoring force for the pendulum bob. Thus the suspension of the apparatus – the earth, plus a CARDAN's suspension and some springs, for example – is supposed to have a *given* path, which will be assumed geodesic, and to produce no gravitational field. Then the bob of the pendulum would move freely, were it not for the action of the springs, which, say, restore the pendulum with a force proportional to its displacement from the given geodesic. Not surprisingly, these assumptions lead to the equation

$$\frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta s^2} + R^\mu_{\nu\varrho\sigma} v^\nu \eta^\varrho v^\sigma + k^2 \eta^\mu = 0$$

for the infinitesimal displacement η^μ of the pendulum bob from the given geodesic (and orthogonal to it). This is just the equation of geodesic deviation, with the last term added on. If these equations are solved in a SCHWARZSCHILD space-time, then the model behaves very much like a FOUCAULT pendulum, except for a small gravitational couple (analogous to the DE SITTER-SCHOUTEN effect) exerted by the central mass. This couple, although small for parameter values taken from the solar system case, can become large in strong and rapidly varying fields.

Thus there is a variety of ways of defining non-rotation by dynamical experiments. To define non-rotation relative to the stars is not quite so straightforward, because one has to be careful not to introduce irrelevant abberation effects, and also one has to decide how to weight stars at different distances.

As far as aberration is concerned, one can always check definitions by going back to the SCHWARZSCHILD case, where of course the MINKOWSKIAN boundary condition represents distant stars at rest.

A measure of rotation relative to the stars can be formulated like this: Consider an observer P with velocity v^μ, and suppose that his local reference frame is defined by three orthonormal vectors $\lambda_\mu^{(a)}$, which are propagated along the world line of P in a given way. Then to a photon of 4-momentum p^μ, he will assign energy $E = p^\mu v_\mu$ and direction defined by direction cosines $\nu^{(a)} = E^{-1} \lambda_\mu^{(a)} p^\mu$. If he receives light from a particular star, then he can plot the motion of that star's projection on a unit sphere fixed to his reference frame by measuring the direction of arrival of successive photons. If he does this for a continuous distribution of stars over the sky, he can construct expressions like $\mu_{(a)} = \int \varepsilon_{abc}\, \nu^{(b)}\, \delta\nu^{(c)}/\delta s\, f\, d\omega$. Here $d\omega$ is solid angle, suitably defined, f is a weighting function, and $\delta\nu^{(c)}/\delta s$ is the rate of change of direction with respect to proper time, of the stars in a given element of solid angle. In general, such expressions will not vanish. In particular, they will not as a rule vanish even if the axes are FERMI propagated. That is to say that in a general Riemannian space-time, there is no choice of local reference frame which can be made by an observer so that the projections of all the distant stars on his unit sphere are at rest. Furthermore, if he adopts a reference frame in which NEWTON's laws are approximately valid, then he will in general find that the positions of the distant stars, referred to that frame, change secularly.

There are of course some cosmological models, such as the ROBERTSON-WALKER models, in which all the stars appear to fundamental observers to have fixed directions. In world models which are homogeneous but not isotropic, this need not be the case. It is possible, therefore, that consideration of such models would yield conclusions about the large scale structure of the universe, by showing that in non-isotropic world-models statement (4) above would not be even approximately true, while consideration of world-models like the SCHWARZSCHILD solution shows that when irregularities are admitted, (4) cannot be an exact principle, but only an approximate statement.

Diskussion – Discussion

A. D. FOKKER: 1. The geodesic precession was referred to as the DE SITTER-SCHOUTEN effect. As a historical fact, SCHOUTEN only found 2/3 of the right amount. I myself have been able to give the correct theory [3].

2. The geodesic precession means that a gyroscope carried along by the earth after a year will *not* point to the same fixed star as before.

3. Given a cloud of free falling particles: how many of these free motions do we need to adjust a geodesic frame of reference in such a way that *all* the other motions (in first approximation) would appear as straight and uniform? That would be the ultimate fact contained in GALILEI's principle of inertia.

F. A. E. PIRANI: 1. I apologize. The fault is really EDDINGTON'S, for he gives the reference to SCHOUTEN, and not to yourself.

2. I quite agree. My remark was intented to refer to the *approximate* empirical situation.

3. I don't know, but I should guess that three would be enough.

H. P. ROBERTSON: I should like to ask Dr. PIRANI whether according to his criterion the matter involved in the GÖDEL solution is rotational or not?

F. A. E. PIRANI: I have not stated the criterion completely, but in any event I do not think anyone has worked out the answer to your question using it.

References

[1] WALKER, A. G., Proc. Edinburgh Math. Soc. [2] *4*, 170 (1935).
[2] PAPAPETROU, A., Proc. Roy. Soc. [A] *209*, 248 (1951).
[3] FOKKER, A. D., Proc. Roy. Acad. Amsterdam, *23*, 729 (1920).

Sur le mouvement des corps en rotation d'après la théorie de gravitation d'Einstein

par V. FOCK (Léningrad)

1. Pour un corps élastique pesant de dimensions finies, les composantes du tenseur impulsion-énergie sont approximativement égales à

$$\left.\begin{aligned} c^2\, T^{00} &= \varrho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\} \\ c^2\, T^{0i} &= \varrho\, v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\} - \frac{1}{c^2}\, p_{ik}\, v_k \\ c^2\, T^{ik} &= \varrho\, v_i\, v_k - p_{ik} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$(i, k = 1, 2, 3)$, où ϱ et $\varrho\, v_i$ satisfont à l'équation bien connue de continuité. L'énergie interne Π et les tensions p_{ik} sont liées par la relation

$$\varrho\,\frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{2}\, p_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{2}$$

Dans (1), U est le potentiel newtonien. Le tenseur $T^{\mu\nu}$ satisfait approximativement à l'équation $\nabla_\mu\, T^{\mu\nu} = 0$.

2. Pour trouver les équations de mouvement des n corps en rotation (problème mécanique à $6\,n$ degrés de liberté) il faut connaître, du moins approximativement, le tenseur impulsion-énergie à l'intérieur des corps. Pour les équations de NEWTON, il suffit de poser $c^2\, T^{00} = \varrho$; $c^2\, T^{0i} = \varrho\, v_i$, tandis que les expressions (1) permettent de trouver les corrections relativistes.

3. Dans un système de coordonnées approximativement harmonique, on a, d'une manière approchée,

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\,\pi\,\gamma}{c^3}\, g\, \nabla_\mu\, T^{\mu\nu}, \tag{3}$$

Δ étant l'opérateur de LAPLACE euclidien. Pour que les conditions d'harmonicité $\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu} / \partial x_\mu = 0$ soient remplies (du moins, à une distance suffisante de chacun des corps), il faut exiger que l'on ait

$$\int g \, \nabla_\mu \, T^{\mu\nu} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 0 \tag{4}$$

et aussi

$$\int (x_i \, g \, \nabla_\mu \, T^{\mu k} - x_k \, g \, \nabla_\mu \, T^{\mu i}) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 0 \, , \tag{5}$$

l'intégrale étant étendue au volume de chaque corps. Les équations (4) (qui sont d'ailleurs équivalentes à celles postulées par PAPAPETROU, Proc. Phys. Soc. 1951) donnent le mouvement du centre de gravité, et les équations (5) le mouvement rotatoire.

4. Pour un système de corps en rotation, les équations (4) peuvent être mises sous la forme de LAGRANGE. On peut écrire d'une manière explicite les dix intégrales des équations de mouvement. Les expressions pour la fonction de LAGRANGE et pour les intégrales étant assez compliqués, nous ne les citons pas.

On Equations of Motion in General Relativity Theory

by L. INFELD (Warschau)

I would like to speak briefly on the history of the problem of motion since I had the great privilege of working on this problem with EINSTEIN. For the first year I worked on the problem with EINSTEIN and HOFFMANN, later with EINSTEIN only. At the end of my lecture, I shall say a few words about simplifications of the solution which I have recently developed.

When I went to Princeton in 1936, EINSTEIN told me that he had been working on this problem for 15 years. Indeed, its history dates back to the paper by EINSTEIN and GROMMER in which they showed that the equations of the geodesic line can be deduced from the field equations of Relativity Theory. Although today this can be shown more simply and more correctly mathematically, the idea of deducing the equations of motion from the field equations is a very important one.

Let us take as an example the Newtonian theory of gravitation. Here we have the LAPLACE or POISSON equations as the field equations. In addition we have the Newtonian equations of motion connecting the acceleration with the potential gradient. In electrodynamics there is a similar situation. Here we have MAXWELL'S equations which are the field equations, and LORENTZ'S equations which are the equations of motion. Finally there is a similar situation in EINSTEIN theory of gravitation. Here we have the field equations for the gravitational field, and the equations of a geodesic line, that is the equations of motion for the test particle.

But the difference between POISSON'S equations of classical mechanics and MAXWELL'S equations on the one hand, and the field equations of relativity theory on the other hand, is this: whereas the former are linear equations, the latter are non-linear. From linear equations we cannot deduce the equations of motion. But there is a possibility of deducing them from non-linear equations. Indeed, EINSTEIN and GROMMER showed that the equations for a test particle – that is, the equations of a geodesic line – can be deduced from the field equations.

What about the motion of two bodies – say a double star – if the masses of both are of the same order? To this problem the solution was suggested by EINSTEIN in 1936.

Let us assume the field equations for empty space, and that matter is represented by singularities of such a field. EINSTEIN found the general form of the equations of motion for the s-th singularity by considering four vanishing surface integrals around this s-th singularity. These surface integrals were independent of the two-dimensional surface und they vanish because of the BIANCHI identities.

In 1938, by using these surface integrals and the proper approximation method, EINSTEIN, HOFFMANN and I obtained the equations of motion to an approximation one step beyond the Newtonian. (Here I should like to mention one of EINSTEIN'S mistakes, because EINSTEIN'S mistakes are more important and interesting than the virtues of many other men. Since we have four equations for the motion of each singularity to determine three space coordinates as functions of time, EINSTEIN thought that the fourth equation would restrict the motion and perhaps give a quantum condition. This proved to be wrong and the fourth equation followed, roughly speaking from the other three equations).

A year later, V. I. FOCK'S paper appeared, in which he found, independently, the Newtonian equations of motion from the field equations. Professor FOCK characterized the difference between his approach and ours in two ways: first he took a continuous distribution of matter and no singularities; second, he used the harmonic coordinate system.

As to the first difference: EINSTEIN very much disliked the illegal marriage between the artificial energy-momentum tensor of matter and the curvature tensor. This was why we preferred to consider empty space with matter as its singularities. Yet the mathematical theory would remain exactly the same if we assumed continuous distribution of matter. The surface integral would merely have to enclose the continuously distributed particle at a given moment.

As to the second difference: In our 1938 paper we used a different coordinate condition than FOCK'S, but from PETROVA'S calculations published eleven years later, it followed that in spite of the different coordinate conditions, the post-Newtonian approximation is exactly the same for coordinate conditions!

In 1938, I received a letter from EINSTEIN about the objections of the mathematician LEVINSON to the rigor of our general theory of motion. EINSTEIN found the objections valid and suggested that we remove them. Thus our work by correspondence began. While removing LEVINSON'S objections, we revised the whole theory. There was one new result which I should like to mention here. We found that the equations of motion up to the post-Newtonian approximation are independent of coordinate conditions. In other words: our approximation method sufficiently determines the coordinate conditions. Therefore, it is absolutely unessential

whether our coordinate conditions used in 1938, or FOCK's, or none at all are used, as long as the proper approximation method is used.

Now I should like to say a few words about a simplification, I found recently (1954). The method has something in common with the work of PAPAPETROU, although he, like FOCK, used continuous distribution and harmonic coordinate conditions. In our work of 1938 (with EINSTEIN and HOFFMANN) and 1949 (with EINSTEIN) we represented matter by singularities. This was equivalent, mathematically, to considering the energy momentum tensor $T^{\mu\nu}$ as linearly and homogeneously dependent on DIRAC's δ function, vanishing everywhere outside the singularities. Thus we had for the field equations

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -8 \pi T_{\alpha\beta} .$$

Now instead of forming surface integrals from the left-hand expressions, let us take the right-hand side. Because of BIANCHI's identities we have

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad \text{(; means covariant differentiation).}$$

Thus

$$\int T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \, d_{(3)}x = 0$$

is the equation of motion of the s-th singularity if the region of integration surrounds the s-th singularity.

To indicate the simplification, let us write

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \underset{1}{h}_{\alpha\beta} + \underset{2}{h}_{\alpha\beta} \cdots$$

where $\eta_{\alpha\beta}$ are the MINKOWSKI values for the metric tensor and the numbers under the h's denote their order. To calculate the equations of motion by the new method requires knowledge of

$$\underset{1}{h}_{\alpha\beta} \quad \text{and} \quad \underset{2}{h}_{00} ,$$

whereas to calculate the equations of motion by the old method requires knowledge of

$$\underset{1}{h}_{\alpha\beta} \quad \text{and} \quad \underset{2}{h}_{\alpha\beta}$$

which means more than ten times as much work. The result in all cases is of course exactly the same.

Diskussion – Discussion

W. Heitler: This is the only case in physics where the equations of motion follow from the field equations. Can one find a general criterion characterizing the type of field theory from which the equations of motions follow or do not follow?

L. Infeld: There is no such general criterion.

References

Einstein, A., and Grommer, I., S. B. preuß. Akad. Wiss., *1* (1927).
Infeld, L., and Schild, A., Rev. Mod. Phys., *21* (1949), p. 408.
Einstein, A., Infeld, L., and Hoffmann, B., Ann. Math. *39* (1938), p. 66.
Fock, V. A., J. Phys. U.S.S.R., *1* (1939), p. 81.
Einstein, A., and Infeld, L., Can. J. Math., *1* (1949), p. 209.
Petrova, Z., eksper. teor. Fiz., *19* (1949), p. 989.
Papapetrou, A., Proc. Phys. Soc., *64*, (London 1951), p. 57.

Relativistic Invariance of Quantum-Mechanical Equations

by E. Wigner (Princeton)

Introduction

Relativity Theory, of which we are celebrating the 50^{th} anniversary, and quantum theory, which is about equally old, originated and developed in very different ways. The theory of relativity owes its origin to a set of experimental facts which can be epitomised as the independence of light velocity from the state of motion of emitter and absorber. However, its guiding stars in the course of its development were conceptual problems, problems of the measurement of space and time and of observation. Experimental facts played a relatively subordinate role in the development of relativity theory at least for the last 25 years. Quantum theory, on the contrary, originated as the result of the discussion of a conceptual problem, the inconsistencies in the classical description of black body radiation. However, the guiding stars of quantum theory were experimental facts: the photoelectric effect, the Stern-Gerlach phenomenon, the Bothe-Geiger-Compton-Simon experiments and, before all, the immense amount of detailed information which was accumulated before the war on atomic spectra and is being accumulated now on nuclear forces and 'elementary particles'. The discovery of much of this information is traceable to the stimulus provided by quantum theory, all of it exerted a profound influence on quantum theory's development.

Similarly, the objects on which relativity and quantum theories focus their prime attention are very different. Relativity theory deals principally with macroscopic objects. In particular, the coordinate systems for which the special theory postulates equivalence are macroscopic, not subject to quantum uncertainties. Furthermore, at least as far as the general theory is concerned, its great successes are all in the domain of macroscopic physics. Its principal subject is a phenomenon which modern experimental physics would surely have overlooked were it not for the rather extraneous fact that the experimenter and his apparatus are constantly pulled to the floor of the Laboratory. The phenomena of principal interest for the quantum theorist are of microscopic nature, particles so

light that one can be almost sure that their individual gravitational effect is unobservable even in principle. Because of this difference in the development, and in the subject matter of the theories of relativity and of quanta, it is hardly surprising that the efforts at their unification met serious difficulties. In fact, it would be hardly surprising if the knowledge of a new set of phenomena were required before a complete unification will become possible. It is most gratifying therefore that the attempts at a partial unification met with such striking success, often in an unforeseeable way. As the principal ones I would quote DIRAC's demonstration that the simplest relativistically invariant single particle equation attributes a spin to the particle described [1], PAULI's demonstration that the simplest way to quantise the single particle equation naturally leads to his equivalence postulate for all particles and to the exclusion principle for particles with half integer spin [2], and the success of the relativistically invariant perturbation methods of TOMONAGA, SCHWINGER and FEYNMAN in describing the finest details in the electronic spectra of hydrogen and other elements [3]. However, notwithstanding their importance, I shall not devote the body of my address to an elaboration of these points but will try to give a bird's eye view of the situation. In particular I shall try to trace the effect of the transition from classical to relativity theory as it manifests itself in the quantum mechanical equations of elementary particles and the invariants of these equations. I shall begin with classical theory; the transition to the special theory of relativity will be described rather completely. As intermediate point for a future transition to the general theory of relativity, the quantum mechanical properties of the DE SITTER spaces will be discussed next. These also provide the mathematically neatest embodiments of relativity theory short of a full reformulation of our space-time concepts. It is well to emphasize, however, that the consideration of the DE SITTER spaces does not yet meet with the very difficult conceptual problems which a full incorporation of the deep physical ideas of the general theory of relativity demands. These problems will be touched upon at the end of the discussion.

I shall base most of the discussion on the equivalence between the quantum mechanical equations for single particles and the simplest (so called irreducible) representations (up to a factor) of the symmetry group of the world in which those equations apply. I had an occasion, a few weeks ago, to present some aspects of this point of view and I shall try to avoid repeating myself[1]). The basic idea of the point of view which I am recapi-

---

[1]) At the meeting of the International Union for Pure and Applied Physics in Pisa, June 13 to 17, 1955; cf. Nuovo Cimento X 3, 517 (1956) It should be pointed out that the considerations referred to in the text apply not only to the possible

tulating is to consider the transformation of the state vector (or wave function) for all the elements of the symmetry group of the underlying 'world' on the same footing [4]. The progress of time, i.e. the displacement of the time axis is one such transformation. It happens to be the one in which the more usual formulation of the theory is principally interested. However, one gains a deeper insight into the significance of relativistic invariance by considering this transformation not separately but in its relation to the other relativistic transformations.

Before starting on the principal discussion, let me illustrate this point by means of an example based on the special theory of relativity. Let us begin with the operator of an infinitesimal time displacement – which is in fact the crucial operator in the more usual formulation of the theory. It follows from the general principles of quantum mechanics that this infinitesimal operator has the form H/i where H is a self-adjoint operator. This gives the well known equation for the state vector Φ

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H \Phi . \tag{1}$$

If one denotes the characteristic functions and the characteristic values of H by ψ_k and ν_k the general solution of (1) can be written down at once

$$\Phi = \sum a_k e^{-i \nu_k t} \psi_k \tag{1a}$$

where the a_k are arbitrary constants. This is a complete solution of the equations of motion. It is, however, not a complete solution of the physical problem because the physical properties of the states ψ_k are not known. One can say that (1a) tells us *how* it moves but not *what* moves.

It is at this point that the relation of the time displacement operator and the other relativistic operators becomes crucial. It tells us, for instance, that the infinitesimal operators for displacements along the spatial axes iP_x, iP_y, iP_z commute with H-simply because one obtains the

states of a single particle but to all sets of states which are as small as possible consistent with the requirement of the superposition principle and relativistic invariance. Thus, for example, they apply equally well to all states of motion of an oxygen atom (or almost any other atom) in its normal state. The requirement 'as small as possible' excludes, however, the states of motion of an oxygen atom in two or more states of excitation because one can select, from these states, a smaller set for which the superposition principle applies and which can be characterised in a relativistically invariant fashion: 'normal state' is such a relativistically invariant characterisation. Thus the expression 'single particle' is somewhat too exclusive for the description of the physical systems to which the considerations of the text apply and these systems have been termed 'elementary systems'. However, single particles are the most important physical systems of this nature. For a further elaboration of this point, see [5].

same result no matter in which order one carries out displacements in space and time. This shows that all those ν_k are equal the corresponding ψ_k of which can be obtained from each other by displacements. This is still a rather trivial result. However, the consideration of the proper LORENTZ transformations and of the rotations gives more significant results and permits one, in fact, to determine the physically important properties of the ψ_k as long as the set of operators which correspond to all relativity transformations is irreducible [5]. This is the essence of the point of view from which I wish to compare the classical and relativistic quantum theories.

Given two relativity transformations r and s (such as the displacements considered above) the corresponding unitary operators may be denoted by U_r and U_s. The operator U_{rs} which corresponds to the product $r\,s$ of the two relativity transformations would seem to satisfy the equation

$$U_{rs} = U_r\,U_s\,.$$

It is a very essential point that this equation is not a necessary consequence of the basic postulates of quantum theory and of the invariance of the equations. Instead, because of the indeterminate factor in the state vectors, only

$$U_{rs} = \omega(r, s)\; U_r\,U_s \tag{2}$$

can be inferred where $\omega(r, s)$ is a function (c-number) depending on r and s. The mathematical term for unitary operators which satisfy (2) is that they form a (unitary) representation up to a factor of the invariance group. The discussion will therefore be based on the representations, up to a factor, of the group of classical mechanics (GALILEI group), of the group of the special theory of relativity (inhomogeneous LORENTZ group or POINCARÉ group), of the DE SITTER space, etc. We begin with the classical theory.

Classical Theory

The symmetry group consists in this case of the symmetry of Euclidean space – that is rotations and displacements – coupled with GALILEI transformations, that is transformations to a moving coordinate system. The corresponding transformations can be represented by the matrices

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & v_x & a_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & v_y & a_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & v_z & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Such a matrix when applied to a vector the components of which are x, y, z, t, 1 gives a new vector the last component of which is again 1. This component has no physical significance; it is introduced only for mathematical convenience. The first four components of the vector obtained by applying our matrix are the transformed coordinates, x', y', z', t'. The R are components of a rotation; they represent the rotation contained in the generalised GALILEI transformation; v_x, v_y, v_z are the components of the velocity of the second coordinate system with respect to the first and the a its displacement in space and time. The group of matrices of the form as given in (3) is the GALILEI group. It is the group of classical mechanics. An investigation of the representations up to a factor of the GALILEI group gives a rather surprising result [6]: there are two and only two types of representations. The first type is the simplest possible; its operators satisfy the simple equation $U_r\, U_s = U_{rs}$ in which r and s are any two GALILEI transformations. In particular U_r and U_s commute if r is a spatial displacement and s a transition to a moving coordinate system. In the second type of representations, spatial displacements and transitions to a moving coordinate system do not commute, taken in different orders they differ by a factor

$$\frac{\omega(r, s)}{\omega(s, r)} = e^{i m \boldsymbol{a} . \boldsymbol{v}} \tag{4}$$

where m is an arbitrary real constant. The SCHRÖDINGER equation (for a single particle) is of the second type, the m in (4) plays the role of the mass of the particle. An investigation of the representations of the second type, along the lines sketched in the introduction, leads to the usual operators for momentum, velocity, energy, and position. In order to obtain, for instance, the position operators, one has to look for three commuting operators which transform as a vector under rotations, to which a spatial displacement $\boldsymbol{a}$ adds the components of $\boldsymbol{a}$ and which are invariant under transitions to a moving coordinate system. There is only one triad of such operators and these are the usual position operators. The momentum and velocity operators can be defined in similar ways and their ratio is given by the m in (4).

All this is quite satisfactory but the point which I wish to make is that the same postulates cannot be satisfied for representations of the first type. There is, in the HILBERT space of these representations, no triad of operators which satisfies, for instance, the conditions enumerated for the momentum operators [7]. The infinitesimal displacement operators p_x, p_y, p_z in particular transform under a transition to a moving coordinate system like

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} \qquad \varepsilon \to \varepsilon + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} \, .$$

That is, the spatial displacement operators remain unchanged under these transformations. One has to conclude that these representations have no physical significance, that there are no particles the state vectors of which would transform, under GALILEI transformations, by means of a representation of the first type. For the time being, this seems to be an isolated result but it will appear in a new light when classical mechanics is viewed as a limiting case of the special theory of relativity.

Special Relativity Theory

The symmetry group consists in this case of a combination of spatial and time displacements with ordinary (homogeneous) LORENTZ transformations. The latter are combinations of rotations and transitions to a moving coordinate system. The transformations of this group can be represented by matrices of the form

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{10} & a_x \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{20} & a_y \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{30} & a_z \\ \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \Lambda_{03} & \Lambda_{00} & a_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{5}$$

The last coordinate is introduced again for mathematical convenience, the Λ are components of a homogeneous LORENTZ transformation, that is the transformation leaves the quadratic form $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ invariant (however, we do not consider, at this point reflections or inversions). It is well known that the GALILEI transformations (3) can be considered as limiting cases of the transformations (5) and it is interesting to see how the representations of the GALILEI group can be obtained as limiting cases of the representations (5), i. e. how the quantum theory of classical physics is obtained as a limiting case of the quantum theory of special relativity.

No representation of the POINCARÉ group (5) has a factor similar to the factor (4) of the GALILEI group. Instead, all of them can be normalised in such a way that

$$U_r U_s = \pm U_{rs} \tag{6}$$

holds for any two transformations r and s. The representations can be classified, on the other hand, by the value which the Lorentzian sum of the squares of the infinitesimal displacement operators

$$P_t^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 \tag{7}$$

assumes. This quantity can be positive, 0, or negative.

Only the first two cases have been investigated thoroughly and they prove to be equivalent with equations for particles with positive and zero restmass respectively. If (7) is positive the momentum, velocity and position operators can be defined in the same fashion as was explained at the discussion of the GALILEI group; if (7) is zero it is, in some cases, not possible to define position operators but the postulates for the momentum and velocity operators have a unique solution in every case. When the transition from (5) to (3) is made, i. e. when the light velocity is assumed to be infinite, the representations just described go over into the representations of the GALILEI group.

The correspondence is as follows [8]

$$P_t^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = m^2 > 0 \qquad \omega = e^{im\,\boldsymbol{a}.\boldsymbol{v}}$$

$$P_t^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = 0, \text{ finite spin} \qquad \omega = e^{iS\,\boldsymbol{a}.\boldsymbol{v}}$$

$$P_t^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = 0, \text{ infinite spin} \qquad \omega = 1$$

$$P_t^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 < 0 \qquad \omega = 1;$$

ω is the expression which appears in equation (4). The positive restmass and the ordinary zero restmass representations have a reasonable non relativistic limit; the other cases lead to representations in which neither momentum nor position coordinates can be defined. The case in which (7) is negative, i. e. for which the infinitesimal displacement operators form a space like vector are commonly assumed to violate the KRAMERS-KRONIG causality conditions. They can be seen also to have no reasonable non-relativistic. This is then the interpretation of the true representations (i. e. for which $U_r U_s = \pm U_{rs}$ for all r and s) of the GALILEI group: they form the non relativistic limit of relativistic particles with space-like momentum which violate the principle of causality.

As is well known, in order to characterise a representation (or the equivalent equation) completely, one has to give in addition to the mass, the spin S of the particle. If the restmass is positive, it is permissible to consider the particle to be at rest; the number of its states at rest is then $2S + 1$. The same is the number of states with any given momentum. However, if the restmass is zero, there are for all $S \geq 1/2$, only two different states. A particle of restmass zero cannot be, of course, considered to be at rest. Nevertheless, it seems worthwhile to explain more in detail this difference in the behavior of the particles with zero and with finite restmass.

If a particle is at rest, and its spin has a definite value in a given direction, the $2S + 1$ states of the particle can be obtained by considering

the particle from coordinate systems which arise by a rotation from the original coordinate system. However, if the particle is in rapid motion, i. e. if the spatial component and the time component of its momentum are nearly equal, and if its spin has a definite value in the direction of its motion, this state of affairs will be invariant under rotations. In order to change the spin component in the direction of motion substantially, one has to consider the particle in a coordinate system in which it is nearly at rest, that is in which its velocity is well below the light velocity. This cannot be done if the restmass of the particle is zero and hence the spin of such particles in the direction of their motion is a relativistically invariant characteristic. The fact that such particles have two directions of polarization, instead of only one, is a result of the reflection symmetry. A reflection transforms a spin component S in the direction of propagation, into a spin component $-S$ in the same direction. In the case of finite restmass, the $-S$ state (as well as all spin directions) can be obtained also by a rotation; the parity is the ratio of the state vectors obtained by rotation and by reflection. Since, for zero restmass, the $-S$ state cannot be obtained by rotation from the $+S$ state, these particles have no parity or rather have both even and odd states with respect to reflection at the same energy and momentum. Only the KLEIN-GORDON particle ($S = 0$) is an exception: in this case the reflection does not produce a new state vector but reproduces the original one with positive or negative sign.

The fact that a fast moving particle's polarization does hardly change under a not too drastic LORENTZ transformation can be seen most easily on the example of the DIRAC electron. If one decomposes a state which has positive polarization in the direction of motion into characteristic functions of $\gamma = i\,\gamma_t\,\gamma_x\,\gamma_y\,\gamma_z$, the absolute values of the coefficients are

$$\frac{P_t + m + P}{(4\,P_t\,(P_t + m))^{1/2}} \qquad \text{and} \qquad \frac{P_t + m - P}{(4\,P_t\,(P_t + m))^{1/2}} \tag{8}$$

The state vector for which $\gamma = 1$ remains such a vector under LORENTZ transformations and the same holds for the $\gamma = -1$ vector. If the coefficient of the former is practically 1, this condition will remain unchanged under LORENTZ transformations which do not change the length of the $\gamma = 1$ vector too drastically. It follows that the polarization will hardly change under such LORENTZ transformations.

It is possible to express this in another way which shows, at the same time, that the property in question is a property of the LORENTZ group and not of a particular representation thereof, i. e., that it is true for all values of the spin. Consider a particle at rest and polarized in the z direction. Impart to it a velocity in the z direction by subjecting it to a LORENTZ transformation with the hyperbolic angle α. Later, this angle

will be assumed to be very large so as to make the particle highly relativistic. At any rate, we now have a particle which is polarized in the direction of its motion – which is in the z direction. In order to obtain a particle which is polarized in the direction of its motion, but is moving in another direction, one would first subject the particle to a rotation to bring the polarization into the direction of its projected motion and then accelerate it in the desired direction. In order to test whether the statement, that the polarization has the direction of the motion of the particle, is relativistically invariant we subject the particle which moves in the direction z and is properly polarized, to a second acceleration, in the x direction, by the hyperbolic angle ε. This angle is arbitrary but will be assumed, at the end, to be much smaller than α. The particle could have achieved the same state of motion by being accelerated by the hyperbolic angle α' in the direction which includes an angle ϑ with the z axis where

$$\operatorname{Cosh} \alpha' = \operatorname{Cosh} \alpha \operatorname{Cosh} \varepsilon, \quad \sin \vartheta = \operatorname{Cosh} \alpha \operatorname{Sinh} \varepsilon / \operatorname{Sinh} \alpha'. \tag{8a}$$

However, the direction of polarization would not be the same in the second case as in the first case. In order to make it the same, one has to rotate the system, before accelerating it in the ϑ direction, by an angle $\vartheta - \delta$ where δ is given by

$$\sin \delta = \operatorname{Sinh} \varepsilon / \operatorname{Sinh} \alpha' = \operatorname{Sinh} \varepsilon \, (\operatorname{Cosh}^2 \alpha \operatorname{Cosh}^2 \varepsilon - 1)^{-1/2}. \tag{8b}$$

This follows, simply, from the identity for LORENTZ transformations

$$A\left(\frac{1}{2}\pi, \varepsilon\right) A(0, \alpha) = A(\vartheta, \alpha') \, R\,(\vartheta - \delta). \tag{8}$$

where α, ε are arbitrary while α', ϑ and δ are defined by the last two equations. $A(\vartheta, \alpha)$ is the acceleration by a hyperbolic angle α in that direction in the $x\,z$ plane which includes an angle ϑ with the z axis; $R(\varphi)$ is a rotation by φ in the $x\,z$ plane. If δ were zero, the particle which was polarized in the direction of its motion after the acceleration α, would have remained polarized in the direction of its new motion (i. e., the ϑ direction) after the second acceleration, by ε. This is not the case, as δ is finite. However, δ is very small if $\varepsilon \ll \alpha$, i. e., if the second acceleration is by a much smaller hyperbolic angle than the first, and if $\alpha \gg 1$.

De Sitter Spaces

The symmetry group of the ordinary DE SITTER space consists of the transformations which leave the DE SITTER world

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - t^2 = R^2$$

invariant. The group of special relativity can be considered as a limiting case of this group in exactly the same sense in which the GALILEI group is a limiting case of the inhomogeneous LORENTZ group. The quadratic forms which these groups leave invariant are

$$x^2 + y^2 + z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 - t^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - t^2 .$$

The equations which are invariant in DE SITTER space, or the representations of the group of DE SITTER space [9], have many interesting features. The distinction between particles with finite and zero restmass becomes unsharp – the finite restmass particles have to be characterized by the statement that their COMPTON wave length is very small as compared with the size of the universe. Even more remarkable are, however, the properties of the particles with respect to the discrete operations of the group such as space and time inversion. In particular, it is difficult to maintain the positive definite nature of the energy, or of its substitute, in DE SITTER space. This is hardly surprising because the same transformation which advances time in one part of space, retards it in another. Again, the physical significance of this circumstance will become clearer when the next stage of the theory, the gerneral relativity is considered.

General Relativity

I am approaching this subject with a great deal of hesitation because even the general outlines of a quantum mechanics which conforms with the ideas of the general relativity theory are quite unclear. Much of what has been said and written on this subject is more nearly a special relativistic theory of a particle with spin 2 rather than an adaptation of quantum theory to the thinking and principles which EINSTEIN has put forward.

Most of us would consider two observations to form the basis of the general theory of relativity. EINSTEIN's first observation is that coordinates have no independent meaning; that only coincidences in space-time can be observed directly and only these should be the subject of physical theory. This observation is so stringent that, properly considered, every physical theory conforms with it and I shall show that this is true also of present day quantum mechanics. However, the realisation that this is the case will show us, at the same time, that it presupposes rather special circumstances. Although these special circumstances prevail for ordinary laboratory experiments, they are special circumstances nevertheless. The necessity of observing these circumstances renders ordinary quantum theory quite artificial from the point of view of EINSTEIN's first axiom.

Einstein's second axiom is the equivalence principle. This gives a preferred role to gravitation over all other types of interactions. The justification for this preference comes from the particular simplicity of gravitational interaction, from the equality of gravitational and inertial mass. The validity of this principle in the microscopic domain is not as evident as the validity of the coincidence axiom. We know of many rules which apply with great rigor to electromagnetic and other types of interaction and it is conceivable that the special role of the gravitational interaction may dissolve in a higher harmony. For this reason, I shall pay prime attention to Einstein's first observation, that only coincidences have a direct physical meaning, values of coordinates do not.

One should observe, in this connection, first, that if one deals only with a finite number of particles, Einstein's first observation cannot be incorporated even into classical theory. The fundamental question to which such a theory would provide an answer would have a form such as 'We have ten particles, so far collisions have occurred between particles 1—2, 5—6 and 3—6. Will particles 1—5 collide?' No theory has yet been attempted to answer questions of this sort and this statement remains true even if some further structure is permitted, such as a time order for the collisions of every particle. The transition from the enumeration of coincidences to a continuous Riemannian space implies the existence of an infinite number of small particles which constantly fly around between the principal particles, collide with them and through an infinity of collisions provide a metric. Actually, the assumption of such an infinite substrate of very small particles is not very far from reality: the light emitted by the stars forms such a substrate. We know of the other stars because the light which was in coincidence with other stars comes to coincide with us. Neither is there a fundamental inconsistency in the assumption of the infinite substrate in classical theory because there is no limitation in classical theory on the size of a particle with given energy.

All this is quite different in quantum theory. First of all, the event of a collision is not an absolute one but is subject to observation. The most natural criterion for a collision to have taken place is that the momentum of the colliding particles has changed. However, the measurement of the momentum requires a finite volume and it is hard to claim, therefore, that the collision is the basic entity of physics in terms of which everything should be described.

Second, there are difficulties with the assumption of an infinite substrate of very small particles. In order to fix the position of a principal particle, such as a star, very accurately, one has to assume that the substrate consists of particles of very short wave length. The short wave length gives, however, a lower limit to the energy and hence also to the

gravitational mass of the substrate. This difficulty would be a very real and very practical one were it not for the very small value of the gravitational constant. The smallness of this constant is quite essential for the formulation of present day quantum theory if one keeps in mind that only coincidences have physical significance. From the point of view of these ideas, a quantum mechanical experiment, undertaken on an isolated system, and the use of LORENTZ metric, would have to be described as follows. The isolated system is surrounded, in space, by a framework, containing clocks at the junctions, which can be used to ascertain, first, that space-time is approximately flat on the surface surrounding the isolated system and which enables one, then, to define a coordinate system with LORENTZ-metric to impart impulses to the system and to register its response. Such a framework-clock system could be used, for instance, to measure collision cross sections or even the whole S-matrix.

Before trying to simplify this scheme, it seems worth while to remark that the necessity of the framework-clock system raises doubts whether it is meaningful to consider a simple system, such as a particle, to be alone in the universe and to obey certain equations. In order to ascertain the behavior of the particle, it would have to be surrounded by our framework-clock system and clearly, the whole universe cannot be so surrounded. For this reason it now seems doubtful to me whether particle equations in DE SITTER space have much significance and in particular whether those properties of the equations are meaningful which follow from the symmetry of this space at large. I refer by this term to symmetry planes and to the symmetry center of such a space.

If one analyses the way in which measurements on so called isolated systems are interpreted, one does in fact find the framework-clock system described above surrounding the isolated system. The motion of the stars etc. guarantees the approximate flatness of the space and provides a coordinate system with LORENTZ metric; the apparatus used for the measurement provides and registers the patricles the properties of which are to be measured. A simple consideration shows also that the gravitational forces emanating from the 'isolated system' do not interfere with the possibility of measuring cross sections with arbitrary accuracy if one is allowed to make the volume surrounded by the framework arbitrarily large.

The state of affairs just described is, nevertheless, unsatisfactory from the point of view of the principle of general relativity because the physical entity which provides the metric is distinct from the entity the properties of which one investigates. The idealisation of a framework which provides a metric but does not influence the 'isolated system' by its gravitational field is possible only because the gravitational constant is so

small. In a theory which fully accepts EINSTEIN'S basic observation it would not be necessary to divide the physical system into two parts: one which gives the metric and the other which is to be described.

The simplest way to accomplish this is to renounce the use of coordinates entirely. The questions to which physical theory would give an answer would be of the sort: I have a system in which there is a three dimensional manifold on which the probability of finding particle 5 is the product of finding particles 1, 2, 3 and 4. Is there another threedimensional manifold on which the probability of finding particle 5 is some other given function of the probabilities of finding particles 1, 2, 3 and 4. Such a theory would not deal with the coordinate derivatives of field quantities but with the derivatives of probability amplitudes with respect to each other.

If one assumes no interaction, the equations of such a theory should be obtainable from the usual quantum mechanical equations through elimination of the coordinates. It must be possible to accomplish this although I have so far succeeded to do so only in a most provisional and incomplete fashion. The equations obtained by such an elimination differ in fact less from usual equations than one might first think. In particular, quantities similar to the g_{ik} appear again. The content of the equations obtained is identical with the content of the equations from which one started and I mention a set of such equations only to illustrate what I have in mind, not because I believe that they solve some problem.

Let me take, for simplicity, a world of only one spatial dimension and consider fields which obey the KLEIN-GORDON equation. Let us use two such fields φ_1 and φ_2 to eliminate the coordinates. The other fields shall be denoted by ψ_a. We then have

$$\frac{\partial \psi_a}{\partial x_\varkappa} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \psi_a}{\partial \varphi_i}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_a}{\partial x_\varkappa^2} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial \varphi_i \, \partial \varphi_j} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\varkappa^2} \frac{\partial \psi_a}{\partial \varphi_i} . \tag{9}$$

The left side summed over $\varkappa$ is equal to $m_a^2 \psi_a$ and a similar substitution can be made on the right side

$$m_a^2 \psi_a = \sum_{ij} g_{ij} \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial \varphi_i \, \partial \varphi_j} + \sum_i m_i^2 \varphi_i \frac{\partial \psi_a}{\partial \varphi_i} \tag{10}$$

where

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\varkappa} . \tag{10a}$$

The first set of equations can be considered to determine the g_{ij}; the requirement of their consistency is the vanishing of a determinant of order 4 ($\alpha = 1, 2, 3, 4$)

$$\left| m_\alpha^2 \psi_\alpha - \sum_i m_i^2 \varphi_i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \varphi_i} \quad \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \varphi_1^2} \quad \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \quad \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \varphi_2^2} \right| = 0 . \tag{11}$$

This equation does not contain coordinates any more. As I said, it is mentioned only as an illustration and not because it has any status.

Diskussion – Discussion

D. VAN DANTZIG: I first want to make a remark concerning the first part of your talk about special relativity in connection with relativistic invariance. It seems to me that the term 'relativistic invariance' is not completely unambiguous. Usually one requires invariance under all transformations which leave ds^2 unchanged. Half of these leave each half light cone, past as well as future, unaltered; the other ones interchange these.

Now, I am not quite sure that there is any *observational* evidence which makes it necessary to include in relativity theory the latter transformations also.

It seems to me rather that the only thing which is really guaranteed by experimental evidence is the group of transformations which leave the time direction unaltered.

There are several points where, without noticing it, one usually introduces a choice of time-direction. For instance in the expression of the energy-momentum of a charged particle, $p_j = m\, i_j - e\, \varphi_j$ $(c = 1)$, i_j is a unit vector along the world line, which can be oriented in two directions. It *must* be oriented, however, so that the time component is *positive*; otherwise p_j is *not* the energy-momentum. In $i^h = dx^h/ds$ one can therefore not always take ds as the *positive* root $|ds|$ of ds^2, but one *must* have $ds = |ds| \operatorname{sgn} dt$, where $\operatorname{sgn} x$ is the sign of x ($= +1$, 0 or -1 according to $x > 0, = 0$ or > 0). This disturbes the invariance under the complete group. The equations of motion are only invariant under $t \to -t$ if also the sign of e is changed.

Just this fact seems to be a cause of many difficulties. For instance the necessity of introducing so many phantom particles in relativistic quantum theory (anti-proton, etc.) might disappear by considering only those

quantities as relativistically invariant, which leave ds^2 as well as sgn dt invariant.

My second question concerns the second half of your talk. It is concerned with the possibility of identifying space-time points.

It seems to me that your remark is in complete agreement with what I said last monday, namely that it is impossible to define in empirical terms what a space-time-point is, and that the only thing we have are events.

I agree with you that it is not sufficient to take only observed events; we have to add to these also possibly observable, hence fictitious events. But I do not think that this leads to the necessity of introducing the concept of space and time, i. e. of a (four dimensional) *continuum* of such fictitious events. It seems to me rather that thereby something essentially unobservable is introduced, and that some kind of 'flash model', i. e. a discrete set of possibly observable events, comparable with a four dimensional crystal, the structure of which is determined (at least partially) by 'transition probabilities' instead of forces, might be more realistic.

F. Hoyle: I should like to express my agreement with Prof. Wigner's remarks on coördinates. It has seemed to me for some time that our present use of coördinates may be a psychological survival from the Newtonian era. Now that we realize that coördinates are nonmore than parameters that must be eliminated in determining relations between observables, it becomes natural to ask whether we are using the most advantageous parameters, or even whether any such parameters are necessary.

E. Wigner: I have learned since the Conference that some of the ideas which were expressed by me are similar to those presented earlier by D. van Dantzig, J. L. Synge and J. Géhéniau.

A. D. Fokker: If theory is concerned with coincidences only, taking such coincidences as consisting in collisions e. g. of particles 1 and 2, of particles 3 and 5, of particles 2 and 6, and so on, how can one know that the particle called 2 in the first event and the particle called 2 in the third event is the same? Does not theory require something more than coincidences only?

E. Wigner: The problem of identification of the particles is greatly affected by the equivalence principle. Naturally, one can distinguish between different types of coincidences, such as an electron-electron coincidence and a proton-electron coincidence. However it is not only difficult, but in principle impossible to identify the electrons (by name or number) between which a coincidence has taken place. However any theory which takes the equivalence theorem into account automatically conforms with this principle and this applies also to the type of equations which was described by me.

M. BORN: Professor WIGNER has put his finger exactly on the spot where the difficulty of reconciling general relativity and quantum mechanics lies, namely that relativity is based on the concepts of coincidences as the only observable things. Atomic physics has to do with collisions of particles; but quantum mechanics treats a collision as a spatially extended process of which only the asymptotic limits are observed.

Though I agree with this analysis, I am rather doubtful about the remedy suggested by WIGNER. He tries to eliminate the coördinates and the time altogether and to reformulate the laws of quantum mechanics in terms of field components or wave functions alone. I prefer to adhere to BOHR's standpoint according to which all actual observations are made with the help of macroscopic systems to which the notions and laws of classical physics can be applied; the interpretation of the results then compels us to assume different laws for the underlying atomic processes. General relativity, in my opinion, has to do only with the macroscopic superstructure. In fact, of the three observable consequences of the theory only the purely macroscopic one, the anomaly of the perihelion of the orbit of Mercury, is explained by EINSTEIN's theory without doubt; the other two effects, the deflection of light rays by the sun and the red-shift of spectral lines (which are micro-phenomena), are still controversial, at least in regard to magnitude. I think that general relativity as we know it may be invalid in this domain. Therefore I do not agree with the general negative attitude towards FREUNDLICH's attempt to base the red-shift on new foundations. He has suggested a formula of the form $\Delta\nu/\nu = A\, l\, T^4$, where T is the absolute temperature on the surface of a star and l a certain 'length of penetration' of the surface layer. He has observed that this means probably an effect proportional to the radiation density u on the surface. If one writes his expression in the form $\Delta\nu/\nu = C\, l\, u/l_0 u_0$, and take for l_0 the atomic length $\hbar/m\,c = \lambda_0/2\,\pi$ (m = atomic mass, λ_0 = COMPTON wave length) and for u_0 the energy of one electron at rest per volume l_0^3, one finds for C the order of magnitude 1. As FREUNDLICH's formula represents almost all known facts (including WOLF-RAYET stars where the relativity effect is about 100 times too small) I think this cannot be an accidental agreement and should not be dismissed without careful study.

P. G. BERGMANN: (à propos BORN's remark) Though I agree that the world point may lose its significance and invariant identity in the very small, I believe formly that there must remain an invariance group (perhaps larger than the invariance group of general relativity) which, correspondence-wise, goes over into that of general relativity. After all, the invariance group of general relativity is based on a sound physical prin-

ciple, to which no exceptions have as yet been observed: the principle of equivalence. Personally I know of two different logical possibilties for constructing groups that 'emasculate' the meaning of the world point. One retains world points in any frame of reference but does not preserve their identities under the invariance group, and that is the group of canonical transformations under which a given covariant theory (such as general relativity) is invariant. There are (admittedly rather trivial) examples of transformations of this type that do not carry world point into world point. The other approach would consist of constructing 'spaces' that have certain topological properties similar to those of point spaces in the large but do not possess 'points' as elementary constituents; I am thinking of such structures as skew lattices, in which the skewness guarantees the non-existence of points. Whether either of these two approaches leads to anything physically promising I do not pretend to know.

References

[1] Dirac, P. A. M., Proc. Roy. Soc. *117*, 610, *118*, 351 (1928).
[2] Pauli, W., Phys. Rev. *58*, 116 (1940), Prog. Theor. Phys. 5, 526 (1950); Schwinger, J., Phys. Rev. *82*, 914 (1951).
[3] See e. g. Jauch, J., and Rohrlich, F., *Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Press, New York 1955).
[4] Wigner, E. P., Ann. of Math. *40*, 149 (1939); Bargmann, V., and Wigner, E. P., Proc. Nat. Acad., Sc. *34*, 211 (1948).
[5] Newton, T. D., and Wigner, E. P., Revs. Modern Phys. *21*, 400 (1949).
[6] Bargmann, V., Ann. of Math. *59*, 1 (1954).
[7] Inonu, E., and Wigner, E. P., Nuovo Cim. *9*, 705 (1952).
[8] Inonu, E., and Wigner, E. P., Proc. Nat. Acad. Sc. *39*, 510 (1953).
[9] The representations of the group of de Sitter space were first determined by L. H. Thomas (Ann. of Math. *42*, 119 (1941). See also T. D. Newton, ibid. *51*, 730 (1950) and P. A. M. Dirac ibid. *36*, 657 (1935).

Mathematical Structure of the Non-Symmetric Field Theory

by B. KAUFMAN (Princeton)

In the gravitational theory the field variables (g_{ik} and Γ^s_{ik}) are taken to be symmetric in their subscripts. This symmetry property is natural if we think of g_{ik} as a metric tensor, and consider it to be the primitive concept in the theory.

However, it is known that one can approach the theory from a different point-of-view, in which the 'displacement field' Γ^s_{ik} is the primary concept. One sees then that the RIEMANN and RICCI tensors can be constructed without making use of a metric tensor, and that at no point in this procedure is symmetry in the indices required. In this sense, the gravitational theory is a specialization of a more general theory – that of the non-symmetric field.

I would like to give an account of the logical steps through which one goes when trying to set up this generalization. The present account will be based on recent work[1]) in which I participated with Prof. EINSTEIN, and in which the theory of the non-symmetric field is presented in a new form.

A. The Formalism of the Theory

1. The primary concept is the *parallel displacement of a (contravariant) vector*: When a vector $\vec{A}$ is displaced parallel to itself by an infinitesimal distance dx^i the change in its components is to be given by

$$\delta A^s = -\Gamma^s_{ik}\, dx^i\, A^k$$

We see, from the way the coefficients Γ enter here, that it would be an unwarranted specialization to take Γ^s_{ik} as symmetric in its lower indices. *Γ^s_{ik} will, then, be considered as a non-symmetrical quantity.*

---

[1]) Annals of Mathematics, *62* (1955), 128.

When we displace the vector $\vec{A}$ parallel to itself around a closed infinitesimally small cycle, we find the total displacement

$$\Delta A^s = R^s{}_{kmn}\, A^k\, f^{mn}$$

(where f^{mn} is the infinitesimal surface element). The coefficient $R^s{}_{kmn}$ is the Riemann curvature tensor, and it has formally the same appearance as in the symmetric field theory, except that it is now constructed from non-symmetric Γ^s_{ik}.

The curvature tensor can be contracted in two different ways. One of these contractions gives a tensor analogous to the Ricci tensor of gravitational theory:

$$R^s{}_{kms} = R_{km} = \Gamma^s_{ks,m} - \Gamma^s_{km,s} - \Gamma^s_{kt}\,\Gamma^t_{sm} + \Gamma^s_{km}\,\Gamma^t_{st}\,.$$

The other contraction (which vanishes identically in the gravitational theory) is:

$$R^s{}_{smn} = V_{mn} = \Gamma^s_{sm,n} - \Gamma^s_{sn,m}\,.$$

From its definition, it is clear that V_{mn} is an antisymmetrical tensor.

2. In the definition of parallel displacement a certain duality enters. One can displace vectors according to the definition given above; but, with the same coefficients Γ^s_{ik}, one can also define a displacement 'dual' to the previous one:

$$\delta A^s = -\Gamma^s_{ik}\, dx^k\, A^i\,.$$

We can say that we have here two displacement fields: Γ^s_{ik} and $\widetilde{\Gamma}^s_{ik} = \Gamma^s_{ki}$. The second displacement field is obtained from the first by the operation of *'transposition'* [1]).

A 'dual' curvature tensor can be constructed from the 'dual' displacement field; this dual tensor and its contractions differ from the corresponding tensors in the original displacement field:

$$R^s{}_{kmn}(\widetilde{\Gamma}) \neq R^s{}_{kmn}(\Gamma)\,, \quad R_{km}(\widetilde{\Gamma}) \neq R_{km}(\Gamma)\,.$$

A duality is thus introduced into the mathematical apparatus, and with it an arbitrariness in the whole scheme. We avoid this arbitrariness by postulating that *all equations of the theory shall be invariant under the operation of transposition.* In other words, one would get to the same field-equations whether one starts with the displacement-field Γ or its transpose $\widetilde{\Gamma}$.

---

[1]) Sometimes referred to as 'Hermitian conjugation'.

It is natural to define for tensors and other field quantities the property of 'transposition symmetry'. $M^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot i\cdot\cdot k\cdot\cdot}(\Gamma)$ will be called transposition-symmetric in the indices i, k if

$$M^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot i\cdot\cdot k\cdot\cdot}(\widetilde{\Gamma}) = M^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot k\cdot\cdot i\cdot\cdot}(\Gamma).$$

If the tensor $Q_{ik}(\widetilde{\Gamma})$ is transposition-*symmetric*, then the system of equations: $Q_{ik}(\Gamma) = 0$ entails the system: $Q_{ik}(\widetilde{\Gamma}) = 0$, i.e., this system of equations is transposition-*invariant*. Conversely, we will expect the left-hand sides of our field-equations to be transposition-symmetric tensors. The property of transposition-invariance is thus seen to be in some sense a weaker form of the property of symmetry.

To give a physical interpretation of the duality which arises in the non-symmetric field, we can say that it corresponds to the double sign of the electric charge: + or —. The postulate of transposition-invariance would then be interpreted to mean: all equations of the theory shall be invariant under change of the sign of the electric charge.

3. In order to determine the behavior of the field-variables, we postulate, as usual, that *the equations of the theory shall be derived from a variational principle*. In other words, we construct from our field-variables a 'variational function' $\mathfrak{H}$; a variation on the field-variables induces a variation in $\mathfrak{H}$, and we demand that

$$\delta \int \mathfrak{H}\, d\tau = 0,$$

when the (independent) variations of the field-variables vanish on the boundaries of integration. This demand will have an invariant meaning if $\mathfrak{H}$ transform like a scalar density under coordinate-transformations. Now, a scalar density can be constructed from the contracted RIEMANN tensor if we multiply it by a contravariant tensor density (of rank 2). In this way we are led to the introduction of new field variables $\mathfrak{g}^{ik}$, by the side of the Γ^s_{ik}; we then have the scalar densities $\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$, $\mathfrak{g}^{ik} V_{ik}$, and others from which to form $\mathfrak{H}$.

All this is entirely analogous to the procedure used in the gravitational theory, except that in that theory R_{ik} is the only available 2-index covariant tensor formed from the Γ^s_{ik}. In the present theory $R_{ik}(\Gamma)$ is a nonsymmetric tensor, and it would be an unjustified specialization to take $\mathfrak{g}^{ik}$ as symmetric, since in that case the antisymmetric part of R_{ik} would drop out of $\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$ (and $\mathfrak{g}^{ik} V_{ik}$ would vanish altogether). Therefore, *$\mathfrak{g}^{ik}$ is taken to be a non-symmetric tensor-density.* $\mathfrak{g}^{ik}$ and Γ^s_{ik} are $16 + 64$ field variables which are to be determined by the differential equations derived from the variational principle.

4. The last remaining question is that of the particular choice of the function $\mathfrak{H}$. Here the postulate of transposition-invariance plays a decisive rôle. In order to obtain transposition-invariant equations from the variational principle, we choose $\mathfrak{H}$ so that it itself is invariant under transposition. It is in this step that the new formulation of the theory appears. In previous versions of the theory, the final field-equations were brought into a transposition-invariant form; however, the variational function from which these equations were derived was not itself invariant under transposition, and this necessitated various artifices in the procedure of the derivation. These artifices are now avoided by the introduction of more natural field-variables U^s_{ik}, instead of the Γ^s_{ik}; and we understand the transposition of indices to refer to the U's rather than to the Γ's.

We can define the U's from the Γ's so:

$$U^s_{ik} \equiv \Gamma^s_{ik} - \delta^s_k \Gamma^t_{it}.$$

And now we can replace the Γ by the U in the Ricci tensor, and we find:

$$R_{ik} = U^s_{ik,s} - U^s_{it} U^t_{sk} + \frac{1}{3} U^s_{is} U^t_{tk}.$$

When the U^s_{ik} in this expression are replaced by their transposes, we find:

$$R_{ik}(\widetilde{U}) = R_{ki}(U)$$

That is to say: $R_{ik}(U)$ *is symmetric with respect to the transposition of the variables* U.

What we have done here is to change our understanding of the duality discussed in § 2. From now on we will understand a 'dual quantity' to mean: a quantity obtained by the transposition of the variables U (and *not* Γ). Similarly, in the postulate of transposition-invariance, we will understand that the U^s_{ik} are the variables which are being transposed. (The $\mathfrak{g}^{ik}$ are assumed to be transposition-symmetric: $\widetilde{\mathfrak{g}}^{ik} = \mathfrak{g}^{ki}$). With this in mind we can rephrase (most of) the preceding discussion, so that it refers to the variables ($\mathfrak{g}$, U) rather than to the variables ($\mathfrak{g}$, Γ).

One might then ask: why not introduce the variables U right from the start, rather than define them through the Γ? Indeed, this is what we will proceed to do, – and it makes the procedure more transparent and natural. The one advantage which the variables Γ have over the U's is a more direct geometrical meaning, in terms of the parallel displacement of vectors[1]).

---

[1]) V. Bargmann has pointed out that the variables U^s_{ik} are related to the displacement-field of a vector-*density*.

We can, however, define the U's formally through their transformations law under coordinate-transformations[1]):

$$U^{l*}_{i*k*} = \frac{\partial x^{l*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k*}} U^l_{ik} + \frac{\partial x^{l*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i*}\partial x^{k*}} - \frac{1}{2}\delta^{l*}_{i*}\frac{\partial x^{t*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{t*}\partial x^{k*}} - \frac{1}{2}\delta^{l*}_{k*}\frac{\partial x^{t*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i*}\partial x^{t*}}. \tag{1}$$

We then show, in a straightforward manner, that the quantity

$$R_{ik} = U^s_{ik,s} - U^t_{is} U^s_{tk} + \frac{1}{3} U^s_{is} U^t_{tk} \tag{2}$$

transforms like a tensor. Furthermore, $R_{ik}(U)$ is transposition-symmetric, and therefore

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} \tag{3}$$

is a transposition-invariant scalar density, and can be used as a variational function.

5. These few steps sketched above contain the complete formalism of the theory. The rest (field-equations, conservation-laws and identities) follows from the variational principle by straightforward, classical, methods.

First one has for the variation of $\mathfrak{H}$

$$\delta\mathfrak{H} = (\mathfrak{g}^{ik}\,\delta U^s_{ik})_{,s} + \mathfrak{N}^{ik}_s\,\delta U^s_{ik} + R_{ik}\,\delta\mathfrak{g}_{ik} \tag{4}$$

where

$$\mathfrak{N}^{ik}_s = \mathfrak{g}^{ik}{}_{,s} + \mathfrak{g}^{it}\left(U^k_{st} - \frac{1}{3}\delta^k_s U^m_{mt}\right) + \mathfrak{g}^{tk}\left(U^i_{ts} - \frac{1}{3}\delta^i_s U^m_{tm}\right). \tag{5}$$

Next, one requires $\delta\int\mathfrak{H}\,d\tau = 0$, under the condition that the independent variations δU^s_{ik} and $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ vanish on the boundary. This gives the 'Field Equations':

$$\left.\begin{aligned} R_{ik} &= 0 \\ \mathfrak{N}^{ik}_s &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Assuming that the field-equations are satisfied, we find from (4) that

$$(\mathfrak{g}^{ik}\,\delta U^s_{ik})_{,s} = 0. \tag{7}$$

[1]) From the transformation-law one might think that we are here introducing a different connection between U and Γ than the one defined above. However, these relations are seen to be identical, when one takes the λ-transformation into account. See below; cf. also the paper cited above.

Different specializations of δU^s_{ik} (no longer required to vanish on the boundary!) give us the 'Conservation Law':

$$\mathfrak{T}^{\;s}_{a,s} \equiv (\mathfrak{g}^{ik}\, U^s_{ik,a})_{,s} = 0 \tag{8}$$

as well as

$$\mathfrak{T}^{\;s}_{a} = (\mathfrak{g}^{ik}\, U^s_{ik}\,\delta^t_a - \mathfrak{g}^{sk}\, U^t_{ak} - \mathfrak{g}^{ks}\, U^t_{ka})_{,t} \tag{9}$$

and the 'Divergence Equation'[1]):

$$\mathfrak{g}^{\underset{\smile}{ik}}_{\;\;,k} = 0\,. \tag{10}$$

((8) and (9) are due to infinitesimal coordinate transformations; (10) – to an infinitesimal λ-transformation).

One sees that the conservation law (8) has a particularly simple form in the new variables.

Finally we get the 'Bianchi Identities' (which are given here modulo the field-equations $\mathfrak{R}^{\;ik}_{s} = 0$)

$$\mathfrak{g}^{ik}\, R_{ik,t} - (\mathfrak{g}^{is}\, R_{it} + \mathfrak{g}^{si}\, R_{ti})_{,s} \equiv 0$$

and another differential identity

$$(\mathfrak{R}^{\;\underset{\smile}{sk}}_{\;\;s})_{,k} \equiv 0\,.$$

(This identity is a trivial consequence of (5), since $\mathfrak{R}^{\underset{\smile}{sk}}_{\;\;s} = \mathfrak{g}^{\underset{\smile}{sk}}_{\;\;,s}$ as one can readily verify).

The existence of identities is due to the invariance properties of $\mathfrak{H}$. On the one hand $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ is invariant under coordinate transformations, so that its variation vanishes *identically* under these transformations, and gives rise to four identities among the field equations. As a result, four of the field variables remain undetermined, so that four arbitrary coordinate choices can be made; fields which differ from one another only by a coordinate-transformation are thus essentially the same.

On the other hand, it is easy to verify that $\mathfrak{H}$ remains invariant under the so-called 'λ-transformations' defined by

$$\begin{aligned} \lambda: U^s_{ik} &\to U^s_{ik} + (\delta^s_i\,\lambda_{,k} - \delta^s_k\,\lambda_{,i}) \\ \mathfrak{g}^{ik} &\to \mathfrak{g}^{ik}. \end{aligned} \tag{11}$$

This invariance leads to one more identity among the field equations. Similar to the case of the 4 Bianchi identities, it suggests that U-fields

[1]) This equation is also a consequence of the system $\mathfrak{R}^{\;ik}_{s} = 0$.

which differ from one another only by a λ-transformation are to be considered as the same field.

What we have done is to extend the group of transformations of general relativity. Under the extended group, the variables U^{s}_{ik} no longer decompose into symmetric and anti-symmetric parts which transform separately.

In concluding this summary of the formalism of the theory, it is important to remark that the system of field-equations (6) is entirely equivalent to the system

$$g^{ik}{}_{,s} + g^{il}\,\Gamma^{k}_{sl} + g^{tk}\,\Gamma^{i}_{ts} = 0 \tag{11a}$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\,(\Gamma^{s}_{is} - \Gamma^{s}_{si}) = 0 \tag{11b}$$

$$R_{\underline{ik}} = 0 \qquad R_{\underset{\smile}{ik},l} + R_{\underset{\smile}{kl},i} + R_{\underset{\smile}{li},k} = 0 \tag{11c}$$

in EINSTEIN's previous version of the theory; and one can pass from (6) to (11) by a suitable substitution of variables.

B. A Few Remarks concerning Physical Interpretation

6. From the relation (9) which gives the components of the density $\mathfrak{T}^{s}_{a}$ one can calculate $\int \mathfrak{T}^{4}_{4}\, d\tau$, and we find (assuming that the field behaves as a SCHWARZSCHILD solution for large distances) that

$$\int \mathfrak{T}^{4}_{4}\, d\tau \sim m\,.$$

It is then natural to look upon $\mathfrak{T}^{s}_{a}$ as an 'energy-momentum tensor-density' (really a pseudo-tensor).

The Divergence Equation (10) corresponds to the vanishing of the magnetic current-density in MAXWELL's theory – provided one identifies $\mathfrak{g}^{i4}$ ($i = 1, 2, 3$) with the components of the magnetic field.

To satisfy the continuity equation for electric charge, one identifies the electric current-density with the vector density[1])

$$\mathfrak{J}^{s} = \frac{1}{6}\,\eta^{ikls}\,(g_{\underset{\smile}{ik},l} + g_{\underset{\smile}{kl},i} + g_{\underset{\smile}{li},k})\,.$$

We have then identically:

$$\mathfrak{J}^{s}{}_{,s} = 0\,.$$

[1]) η^{ikls} is the LEVI-CIVITA tensor density, antisymmetric in all indices.

In order to make further connections with electromagnetic theory, one has to use approximation methods. We assume that $g_{\underset{\smile}{ik}}$ is a weak field of first order, and that $g_{\underline{ik}}$ differs from the MINKOWSKI values by quantities of the first order. When the field equations are written out to first order, we find that they decompose into two sets: (1) 'gravitational equations' which are identical with the symmetric-field equations (to that order of approximation); (2) 'MAXWELL equations'[1])

$$\eta_s\, g_{\underset{\smile}{is},s} = 0 \quad \text{and} \quad \eta^s\, (g_{\underset{\smile}{ik},l} + g_{\underset{\smile}{kl},i} + g_{\underset{\smile}{li},k})_{,ss} = 0\,.$$

The second set of these equations is weaker than the corresponding one in MAXWELL's theory. Of course, this first approximation, in a non-linear theory, tells us nothing about the interaction of the symmetric and anti-symmetric fields. For that one has to make complicated calculations to higher orders of approximation.

C. Results in the Theory

7. When we attempt to solve the equations in this theory, we are faced with difficulties which are even greater than those of the gravitational theory. The usual approach is to treat the system of equations as consisting of two parts. The first part ($\mathfrak{N}_s^{ik} = 0$ in our presentation) is quite simple in principle. It is a system of linear, non-homogeneous algebraic equations for the U^s_{ik} (or correspondingly the Γ^s_{ik}) as unknown variables, to be solved in terms of $\mathfrak{g}^{ik}$ and $\mathfrak{g}^{ik}{}_{,s}$. In principle, one has only to invert the matrix of coefficients of the unknown U's (or Γ's), and to state the exceptional cases when this inversion cannot be carried out (due to the vanishing of the determinant of the coefficients). In practice, however, the inversion is quite a laborious task. Several papers have appeared [1], expressing the inverted matrix in different forms.

The complexity of the expressions for U in terms of $\mathfrak{g}^{ik}$, $\mathfrak{g}^{ik}{}_{,s}$ makes it impossible in general to substitute for U in the other part of the system of equations ($R_{ik} = 0$). Such substitutions have only been carried out in very specialized cases.

Nevertheless, some general information about the system $R_{ik} = 0$ can be obtained by analyzing the way in which the derivatives $g_{ik,4}$ and $g_{ik,44}$ enter into the equations. One can then treat the Cauchy problem relative to this system, and it has been shown [2] that, just as in the gravitational field theory, so also in the non-symmetrical theory, the Cauchy problem (the question of 'relativitic determinism') has a unique solution.

[1]) $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1 = -\eta_4\,.$

A considerable amount of work has been done on special solutions in the theory. Rigorous solutions in various forms have been given for the static, spherically-symmetric case [3]. All of these solutions show singularities. Similarly, for the axially-symmetric static case we have shown that the assumption of regularity at the origin is incompatible with the field-equations. For time dependent fields, a rigorous special solution is known, which is everywhere regular (the 'plane electromagnetic wave') [4]. This solution however is not Euclidean at infinity.

Singular solutions are inadmissible in a complete field theory which does not make an artificial separation between matter and the field produced by it. Acceptable solutions, according to this viewpoint, must be everywhere regular[1]). In addition, the solutions are assumed to be asymptotically Euclidean, in a suitable coordinate-system.

8. The requirement that the field variables shall be everywhere regular has several important consequences, both locally and globally.

a) The space-time signature. In the gravitational theory one requires that

$$det\,(g_{ik}) \neq 0 \tag{12}$$

everywhere, so that the contravariant quantities g^{ik} are nowhere singular. Taking into account the boundary conditions, which require the field to be imbedded in a Euclidean space, we see that this determinant is everywhere negative. The matrix g_{ik} can be transformed locally into a diagonal form with the signature $(-, -, -, +)$, and this gives us the basis for distinguishing time-like and space-like directions at each point of the continuum.

In the non-symmetric theory, the g_{ik} matrix cannot be transformed into a diagonal form by any *real* coordinate transformation. The simplest form to which g_{ik} can be transformed locally is

$$g_{ik} \sim \begin{pmatrix} -1 & \underset{\smile}{g}_{12} & & \\ -\underset{\smile}{g}_{12} & -1 & & \\ & & -1 & \underset{\smile}{g}_{34} \\ & & -\underset{\smile}{g}_{34} & +1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

where $\underset{\smile}{g}_{12}$, $\underset{\smile}{g}_{34}$ are real quantities which can be expressed as functions of invariants of the field. One can take the diagonal terms in (13) to be the

---

1) The manifold on which the field-variables are defined is assumed to be topologically equivalent to the Euclidean 4-space. The property of regularity then means: there exists a system of coordinates (x^i), covering the whole manifold, such that when expressed in this coordinate-system, $g^{ik}\,(x^i)$ are regular functions.

'signature' of the non-symmetric field. Now, a necessary condition for carrying out the transformation to the 'canonical' form (13) is: det $(\underline{g_{ik}}) \neq 0$. However, in the theory of the non-symmetric field, one wants to avoid conditions which apply to parts of the total tensor. Instead, one reads the condition (12) as applying to the total g_{ik} tensor. In addition, we require that the field variables Γ^s_{ik} are finite and uniquely determined at each point in terms of the g_{ik} and their first derivatives; from this we can *deduce* that *det* $(g_{ik}) \neq 0$. Hence one has a well-defined space-time signature at each point [5].

b) Restriction on the antisymmetric field. From the (local) 'canonical' form of the g_{ik} matrix, we must clearly have $|\underset{\vee}{g_{34}}| < 1$, in order to prevent the determinant of g_{ik} from vanishing. This means that the invariants of the antisymmetric field cannot be arbitrarily given [5].

c) Vanishing of mass for static fields. In the gravitational theory we have the Einstein-Pauli theorem for static fields, which states that if the field is everywhere regular, satisfies the field-equations, and behaves at large distances like a Schwarzschild solution, then its mass must vanish. In the proof, Gauss' theorem is applied to a divergence which is known to vanish in the static field. Since the field is assumed regular, the volume-integral over the divergence can be converted into a surface-integral; the boundary conditions are inserted, and it is found that the integral is proportional to the 'mass' of the Schwarzschild solution. On the other hand, this integral vanishes, since its integrand is everywhere zero.

The proof can be carried out almost as readily in the non-symmetric field theory. Equation (8) in which $\mathfrak{T}^s_a$ is defined shows that $\mathfrak{T}^4_4 = 0$ in a static field. On the other hand, equation (9) gives us $\mathfrak{T}^4_4$ as the divergence of some function of the field-variables. From here on the proof is formally the same as in the gravitational theory [6].

d) Are static fields locally Euclidean? Lichnerowicz [7] has shown that this is the case for the gravitational field theory. He makes use of theorems about elliptic operators: $F.V \equiv g^{ij}\, V_{,ij} + a^i\, V_{,i}$ (g^{ij} is a definite-negative form); if $F.V$ is known to be non-negative in a given domain, then V cannot attain a minimal value within the domain, without reducing to a constant. Now, the gravitational field-equations, in the time-independent case, can be put into a form where the theorems apply. To do this, one has to express the Γ^s_{ik} explicitly in terms of the g_{ik}. In addition, one assumes that the solution behaves asymptotically like a Schwarzschild particle – in particular[1]): $g_{44} \sim 1 - m/r \leq 1$ so that a *regular* g_{44} must attain its lowest value at some point in space. In the non-symmetric

[1]) Here a tacit assumption is brought in: the Schwarzschild constant m (teh 'mass') must be positive.

field-theory, however, the expression of Γ^{s}_{ik} through the g_{ik} is so complicated that it may not be possible to establish whether or not $F.g_{44}$ is everywhere non-negative. It would be very desirable to provide a proof of this theorem which does not depend on the explicit substitution of Γ by g; such a proof could then be extended to the non-symmetric theory [8].

D. Alternative Theories

Several variations of EINSTEIN's theory have been suggested. I would like to describe two of these very briefly.

a) SCHRÖDINGER's 'purely affine' theory [9] is based on the same principles as EINSTEIN's. However, for his variational function, SCHRÖDINGER chooses $\mathfrak{H}_s = \sqrt{-det\,(R_{ik})}$ (a scalar density!). Thus he does not bring in the additional tensor g^{ik} into the variational procedure. The only quantities to be varied are the Γ^{s}_{ik}. However, SCHRÖDINGER *defines* $\lambda\, \mathfrak{g}_{ik} = \delta\mathfrak{H}/\delta R_{ik}$ (λ being a constant which is inherently $\neq 0$). By so doing, he arrives at a system of differential equations for $\mathfrak{g}$ and Γ, which is found to be not transposition-invariant. For that reason, a change of variables has to be made (from Γ to $*\Gamma$), which brings the equations into a transposition-invariant form. The final equations are identical with EINSTEIN's equations (11) (the g, Γ representation), except for the appearance of the constant λ, which replaces (11c) by

$$R_{\underline{ik}} = \lambda\, g_{\underline{ik}} \qquad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = \lambda\,(g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k})\,.$$

In SCHRÖDINGER's theory, λ plays the role of a cosmological constant, and is therefore considered as being very small.

It is of interest to note that the change of variables (from Γ to $*\Gamma$) can be avoided in SCHRÖDINGER's theory just as in EINSTEIN's theory, by using from the beginning the variables U, in terms of which R_{ik} is transposition-invariant.

b) In KURŞUNOĞLU's theory [10], equation (11a) is accepted as a *definition* of the Γ^{s}_{ik}; equation (11b) is also adopted. These equations are shown to lead to 4 relations among the g and Γ, which are identical in form with the generalized BIANCHI identities, except that g_{ik} appears instead of R_{ik}. This suggests a proportionality between the similar relations, which, when carried out, yields the equation system in KURŞUNOĞLU's theory. (11c) is now replaced by

$$R_{\underline{ik}} = -p^2\,(g_{\underline{ik}} - b_{ik}), \quad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = -p^2\,(g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}).$$

b_{ik} is a symmetric tensor formed from the g_{ik}, but different in general from $g_{\underline{ik}}$. When the antisymmetric field is absent, b_{ik} and $g_{\underline{ik}}$ coincide; hence, the constant p^2 is not a cosmological constant. The equation-system is also derivable from a variational principle, with

$$\mathfrak{H}_K = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} - 2\, p^2 \left\{ [-\, det\, b_{ik}]^{1/2} - [-\, det\, g_{ik}]^{1/2} \right\} .$$

Diskussion – Discussion

Mme A. Tonnelat: Il est possible aussi d'élargir la théorie en supprimant la condition

$$\delta_\varrho\, g^{\underset{\smile}{\mu\varrho}} = 0$$

Pour cela, il suffit de partir d'une densité formée avec un tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}(L)$ écrit avec une connexion $L^{\varrho}_{\mu\nu}$ dont le vecteur de torsion est nul. Après changement de connexion affine $L^{\varrho}_{\mu\nu} \to \varDelta^{\varrho}_{\mu\nu}$, on aboutit finalement à l'équation

$$g^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\varrho} = 0$$

écrite avec une connexion $\varDelta$ telle que

$$\delta_\varrho\, g^{\underset{\smile}{\mu\varrho}} = g^{\mu\varrho}\, \varDelta_\varrho$$

mais $\delta_\varrho\, g^{\underset{\smile}{\mu\varrho}}$ et $\varDelta_\varrho = \varDelta^{\sigma}_{\underset{\smile}{\varrho\sigma}}$ ne sont dans ce cas pas nuls séparément.

References

[1] Hlavatý, V., Journal of Rational Mechanics and Analysis *2* (1953), 1.
Bose, S. N., Annals of Mathematics *59* (1954), 171.
Einstein, A., and Kaufman, B., Annals of Mathematics *59* (1954), 230.
Tonnelat, M.-A., Journal de Physique et le Radium *16* (1955), 21.
[2] Lichnerowicz, A., Journal of Rational Mechanics and Analysis *3* (1954), 487.
[3] Papapetrou, A., Proceedings of the Royal Irish Academy [A] *52* (1948), 69.
Wyman, M., Canadian Journal of Mathematics *2* (1950), 427.
Bandyopadhyay, G., Indian Journal of Physics *25* (1951), 257.
Bonnor, W. B., Proceedings of the Royal Society of London [A] *209* (1951), 353.
[4] Hlavatý, V., Seminario Matematico Universita di Padova *23* (1954), 316.
[5] Einstein, A., and Strauss, E. G., Annals of Mathematics *47* (1946), 731.
Einstein, A., and Kaufman, B., Annals of Mathematics *59* (1954), 230.
Papapetrou, A., Physical Review *73* (1948), 1105.
[6] Lenoir, M., Comptes Rendus de l'Academie des Sciences *237* (1953), 384.
[7] Lichnerowicz, A., *Problèmes Globaux en Mécanique Relativiste* (Paris 1939).
[8] Lenoir, M., Comptes Rendus de l'Academie des Sciences *237* (1953), 424.
[9] Schrödinger, E., *Space-Time Structure* (Cambridge 1950).
[10] Kurşunoğlu, B., Physical Review *88* (1952), 1369.

Sur les systèmes de coordonnées privilégiés dans la théorie de gravitation d'Einstein

par V. Fock (Léningrad)

1. La notion «relativité» est étroitement liée à la notion «invariance» (ou covariance). Cette dernière s'emploie souvent dans deux sens différents qu'il faut cependant distinguer. On a (a) l'invariance dans l'espace physique des coordonnées et (b) l'invariance dans un espace fonctionnel. Pour éviter la confusion, la notion «relativité» ne devrait s'appliquer qu'à l'invariance dans le sens (a).

2. On sait que la théorie de gravitation d'Einstein a pour base le principe physique fondamental qui exprime l'identité de la masse inerte et de la masse gravifique. Ce ne sont que les équations de gravitation qui constituent l'expression complète de ce principe. La covariance dans un espace fonctionnel qui permet de traiter d'une facon uniforme tous les systèmes de coordonnées existe déja dans la mécanique newtonienne (équations de Lagrange de seconde espèce) et ne caractérise aucune loi physique. Quant à l'équivalence entre le champ de gravitation et celui de l'accélération, elle est purement locale.

3. Dans le problème de la définition des coordonnées il est indispensable de préciser le caractère du système physique considéré. Si le système des masses est isolé (et plongé dans un espace-temps pseudo-euclidien), on peut indiquer un système de coordonnées défini d'une manière unique, à une transformation de Lorentz près. Le problème n'étant pas local, les conditions à l'infini y jouent un rôle essentiel.

4. Dans le cas d'un système isolé, la situation en ce qui concerne les coordonnées est, dans la gravifique einsteinienne, identique à celle dans l'espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski: on peut se servir des coordonnées quelconques, mais il existe un système de coordonnées privilégié. L'existence d'un tel système caractérise les propriétés intrinsèques de l'espace-temps et constitue un fait fondamental, dont l'importance ne se réduit pas aux simplifications qu'il introduit dans les calculs. Par exemple, on ne peut donner raison à Copérnic que si l'on accorde une importance de principe aux coordonnées privilégiées dont nous venons de parler.

Diskussion – Discussion

L. Infeld: For three years my friend Professor Fock and I have discussed this problem, and we cannot convince one another. I doubt if we shall succeed in doing so today. But since Professor Pauli insists, I shall make a few remarks about the difference between Professor Fock and the usual understanding of relativity. Professor Fock adds to the gravitational equations the coördinate conditions $\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. In this way he obtains a system of equations which are invariant with respect to the Lorentz transformation only. In this he sees a virtue, while I see in it a retrogressive step from the achievements of Relativity Theory. Why? Because the idea of invariance is lost, as is the extremely important idea of the equality of gravitational and inertial mass, the idea which leads us beyond the Lorentz transformation. Also lost is the heuristic approach by which we obtain the equations of the gravitational field. Lost is the beauty of relativity theory which – from the mathematical point of view – admits all coördinate systems. What do we gain by adding the harmonic coördinate system? Professor Fock claims that the Ptolemaic and Copernican systems are not equivalent and that this fact emerges from his coördinate conditions. When do we meet this problem? We meet it when we consider perihelion motion, or the deflection of light, or the problem of the motion of double stars. But in each of these cases we use a Copernican system to describe the phenomena. The question we ask is the following: What is the difference between the description of these phenomena according to Newtonian and relativistic physics? To answer this question, we must use a Copernican coördinate system. In the case of perihelian motion, for example, this means a coördinate system which is Galilean at infinity and in which the sun is at rest. No one can have anything against the use of a harmonic coördinate system when it is convenient. But to add it always (or almost always) to the gravitational equation and to claim that its virtue lies in the fact that the system is only Lorentz invariant, means to contradict the principle idea of relativity theory.

V. Fock

Mein Freund Professor Infeld hat mir viele Fragen gestellt, und meine Antwort kann nicht kurz gefaßt werden.

Die durch die vier Gleichungen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ und durch entsprechende Grenzbedingungen definierten harmonischen Koordinaten bilden eine sinngemäße Verallgemeinerung der Inertialsysteme der klassischen Mechanik. (Alle Betrachtungen gelten im Falle eines isolierten Massensystems.) Die Beziehung zwischen den harmonischen Koordinatensystemen und den allgemein-kovarianten Gleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie ist ganz analog der Beziehung zwischen den Inertialsystemen und den

allgemein-kovarianten Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art der klassischen Mechanik. Die Anerkennung der prinzipiellen Bedeutung der harmonischen Koordinatensysteme in der Gravitationstheorie ist ebensowenig ein rückgängiger Schritt (a retrogressive step), wie die Anerkennung der prinzipiellen Bedeutung der Inertialsysteme in der klassischen Mechanik, die ja auch allgemein-kovariant formuliert werden kann.

In meinem Vortrag habe ich bereits darauf hingewiesen, daß das Wort „Relativität" sowohl im Sinne „Homogeneität des Raumzeitkontinuums", als auch im Sinne „Kovarianz der Gleichungen" gebraucht wird. Wenn nun Professor INFELD über Relativität spricht und den Verlust an Relativität bedauert, den mein Standpunkt mit sich bringt, so hat man vor allem klarzustellen, was darunter gemeint ist. Wird hier Homogeneität gemeint, so ist dem nicht abzuhelfen: die Gravitationstheorie verzichtet eben auf Homogeneität, und es gibt dort kein „allgemeines Relativitätsprinzip", welches ein Analogon zu dem die Homogeneität des GALILEIschen Raumes ausdrückenden GALILEIschen Relativitätsprinzip der „speziellen" Theorie wäre. Wird dagegen unter Relativität allgemeine Kovarianz gemeint, so gibt es in der Gravitationstheorie ebensoviel oder ebensowenig Relativität wie in jeder anderen allgemein-kovarianten Theorie, also auch z.B. in der klassischen unrelativistischen Mechanik mit ihren LAGRANGEschen Gleichungen 2-ter Art oder in dem „absoluten" RICCI-Kalkül (absolute differential calculus), welcher ja die Basis der „allgemeinen Relativität" bildet.

An und für sich ist die Idee der allgemeinen Kovarianz keine physikalische Idee, und ich kann nicht einsehen, wie sie mit der Tatsache der Existenz bevorzugter Koordinatensysteme in Konflikt geraten kann.

Was den heuristischen Wert dieser Idee betrifft, so kommt er nur dann zum Vorschein, wenn die Forderung der allgemeinen Kovarianz mit anderen, schwerer zu präzisierenden Forderungen wie „Einfachheit", „innere Vollkommenheit", „Schönheit" der Theorie verbunden ist. Und zwar bilden gerade diese Forderungen das Wesentliche, die Kovarianzforderung ist dagegen vom logischen Standpunkte selbstverständlich.

Das grundlegende GALILEIsche Gesetz der Gleichheit der schweren und der trägen Masse kommt durch die Benutzung von Inertialsystemen (bzw. von deren Verallgemeinerungen) erst recht zu seiner vollen Bedeutung. Denn dieses Gesetz ist nicht lokal, im Gegensatz zum Äquivalenzprinzip, auf das man sich gewöhnlich stützt. Der Übergang vom GALILEIschen Gesetz zum Äquivalenzprinzip bedeutet eine unnötige Beschränkung auf kleine Räume und homogene Felder, also einen Verlust an Allgemeinheit.

Die Entscheidung der Frage, ob die beiden Systeme, das Ptolemäische und das Kopernikanische, gleichberechtigt sind oder nicht, hängt davon ab, wie die Frage über die Existenz eines bevorzugten Koordinatensy-

stems (eines Inertialsystems) beantwortet wird. Wird die Existenz eines solchen Koordinatensystems behauptet, so wird damit gleichzeitig auch das Kopernikanische System bevorzugt. An dieser Schlußfolgerung kann die allgemein-kovariante Form der EINSTEINschen, bzw. der unrelativistischen LAGRANGEschen Gleichungen nichts ändern.

Das von Professor INFELD Gesagte läßt vermuten, daß er die Bezeichnung „allgemeine Relativitätstheorie" zu buchstäblich versteht und die Hauptidee dieser Theorie in deren Aussagen über Koordinatensysteme erblickt. Seinem Standpunkt kann ich nicht zustimmen. Die Hauptidee der EINSTEINschen Gravitationstheorie ist der enge Zusammenhang zwischen den inneren (absoluten) Eigenschaften des Raumzeitkontinuums und der Bewegung der Materie. Koordinatenprobleme können erst dadurch eine prinzipielle Bedeutung gewinnen, daß die Existenz gewisser Koordinatensysteme mit diesen inneren Eigenschaften des Kontinuums verknüpft ist. (So ist z. B. die Existenz GALILEIscher Koordinaten mit der Homogeneität des GALILEIschen Raumes verknüpft, ebenso die Existenz harmonischer Koordinaten mit dem Verhalten des ein Massensystem umgebenden Raumes, insbesondere mit dessen Verhalten im Großen.) Sonst aber haben Koordinatenprobleme eine untergeordnete Bedeutung.

H. BONDI: Ich möchte zwei Fragen über diesen hochinteressanten Vortrag stellen: Gibt es einen Zusammenhang zwischen den von den Koordinatenbedingungen auserlesenen Systemen und den lokalen Inertialsystemen? Da beide die gleiche Freiheit der LORENTZtransformationen haben, liegt die Möglichkeit eines Zusammenhanges nahe. Zweitens, die Bedeutung der Grenzbedingungen im Unendlichen ist wohl klar, wenn die mittlere Dichte des untersuchten Systems viel größer ist als die mittlere Dichte des Universums. Aber, wenn es nicht so ist, dann müssen wohl die Grenzbedingungen so gestellt werden, daß die Metrik des Systems in die Metrik des Universums übergeht. Man würde hoffen, daß dann das auserlesene Koordinatensystem völlig bedingt ist. Denn kosmologisch gibt es ja keine LORENTZinvarianz, sondern an jedem Punkt gibt es nur einen Bewegungszustand, von dem aus das Universum isotropisch ausschaut.

V. FOCK

Auf die erste Frage:

Harmonische Koordinatensysteme bilden ein Analogon nicht zu den lokalen (frei fallenden) Inertialsystemen, sondern zu den den ganzen Raum umfassenden Inertialsystemen der NEWTONschen Mechanik.

Auf die zweite Frage:

Die beiden genannten Fälle: der Fall eines isolierten Massensystems (vom Typus des Sonnensystems) und der kosmologische Fall erfordern eine verschiedene Behandlung des Raumes im Großen. Im ersten Fall

kann der Raum im Großen als GALILEIsch betrachtet werden, im zweiten Fall kann man zu dessen Charakterisierung die FRIEDMANNsche Lösung der EINSTEINschen Gleichungen heranziehen. In meinem Vortrag habe ich nur den ersten Fall betrachtet und nur für diesen Fall Grenzbedingungen aufgestellt und bevorzugte Koordinaten definiert. Im allgemeinen Fall spricht man lieber nicht von Grenzbedingungen, sondern von den Eigenschaften des Raumes im Großen. Durch diese Eigenschaften wird die Existenz der bevorzugten Koordinatensysteme bedingt.

Mit der Meinung, daß die beiden oben genannten Fälle verschiedene Problemstellungen erfordern, bin ich also ganz einverstanden.

V. BARGMANN: Prof. FOCK hat eine Bemerkung aus EINSTEINS Autobiographie zitiert, die es erscheinen läßt, daß EINSTEIN die Notwendigkeit von Grenzbedingungen in der Gravitationstheorie verneinte. Ich möchte demgegenüber betonen, daß sich in EINSTEINS letztem Manuskript (geschrieben Januar 1955; es wird im Herbst als Appendix zu seinem Buch „Meaning of Relativity" erscheinen) der Satz findet: „Nach meiner Meinung sind in einer Feldtheorie Grenzbedingungen unerläßlich."

V. FOCK

Es ist sehr wohl möglich, daß EINSTEIN bei verschiedenen Angelegenheiten entgegengesetzte Meinungen über denselben Gegenstand geäußert hat. Wesentlich ist aber die Frage: welche der beiden Meinungen ist mit der ganzen Einstellung EINSTEINS im Einklang? Die Antwort darauf findet man leicht, wenn man beachtet, daß eben das Äquivalenzprinzip als Grundlage für die gesamte Gravitationstheorie von EINSTEIN angesehen wurde, und wenn man bedenkt, daß die mit diesem Standpunkt verbundene rein lokale Betrachtungsweise mit der Anerkennung der Unerläßlichkeit der Grenzbedingungen im Widerspruch steht.

Physics and Relativity

by MAX BORN (Bad-Pyrmont)

I have been honoured by being asked to give the address on Physics and Relativity in place of NIELS BOHR who was prevented to come to Bern.

I do not know what BOHR had in mind when he chose the title. I cannot remember that I have ever discussed relativity with him; there was in fact nothing to discuss as we agreed on all essential points. The title Physics and Relativity may be interpreted in different ways: it may mean either a review of the empirical facts on which relativity was built, or it may mean a survey of the consequences of relativity for the whole of physics. Now such a survey was just the purpose of this conference, and it would be presumptious and quite beyond my power to summarise all the reports and investigations. I propose instead to give you an impression of the situation of physics 50 years ago when EINSTEIN's first papers appeared, to analyse the contents of these papers in comparison with the work of his predecessors and to describe the impact of them on the world of physics. For most of you this is history; relativity was an established theory when you began to study. There are very few left who like me can remember those distant days. For my contemporaries EINSTEIN's theory was new and revolutionary, an effort was needed to assimilate it. Not everybody was able or willing to do so. Thus the period after EINSTEIN's discovery was full of controversy, sometimes of bitter strife. I shall try to revive these exciting days when the foundation of modern physics was laid, by telling the story as it appeared to me.

When I began to study in the year 1901 MAXWELL's theory was accepted everywhere but not taught everywhere. A lecture by CLEMENS SCHAEFER which I attended at Breslau University was the first of its kind there and appeared to us very difficult. When I came to Göttingen in 1904 I attended a lecture on optics by WOLDEMAR VOIGT which was based on MAXWELL's theory; but that was a new venture, the transition from the elastic aether theory was only a few years old. The main representative of the modern spirit in theoretical physics at Göttingen was at that time MAX ABRAHAM, whose well known book, later called ABRAHAM-FÖPPL,

now ABRAHAM–BECKER, was our main source of information. All this to indicate the scientific atmosphere in which we grew up. NEWTON'S mechanics still dominated the field completely, in spite of the revolutionary discoveries made during the preceeding decade, X-rays, radio-activity, the electron, the radiation formula and the quantum of energy etc. The student was still taught – and I think not only in Germany, but everywhere – that the aim of physics was to reduce all phenomena to the motion of particles according to NEWTON'S laws, and to doubt these laws was heresy never attempted.

My first encounter with the difficulties of this orthodox creed happened in 1905, the year which we celebrate to-day, in a seminar on the theory of electrons, held not by a physicist but by a mathematician, HERMANN MINKOWSKI. My memory of these long by-gone days is of course blurred but I am sure that in this seminar we discussed what was known at this period about the electrodynamics and optics of moving systems. We studied papers by HERTZ, FITZ GERALD, LARMOR, LORENTZ, POINCARÉ and others, but also got an inkling of MINKOWSKI'S own ideas which were published only two years later.

I have now to say some words about the work of these predecessors of EINSTEIN, mainly of LORENTZ and POINCARÉ. But I confess that I have not read again all their innumerable papers and books. When I retired from my chair in Edinburgh I settled at a quiet place where no scientific library is available, and I got rid of most of my own books. Therefore I rely a good deal on my own memory, assisted by a few books which I shall quote.

H. A. LORENTZ'S important papers of 1892 and 1895 on the electrodynamics of moving bodies contain much of the formalism of relativity. However his fundamental assumptions were quite unrelativistic. He assumed an aether absolutely at rest, a kind of materialisation of NEWTON'S absolute space, and he also took NEWTON'S absolute time for granted. When he discovered that his field equations for empty space were invariant for certain linear transformations, by which the coordinates x, y, z and the time t were simultaneously transformed into new parameters x', y', z', t' he called these 'local coordinates' and 'local time'. These transformations, for which POINCARÉ later introduced the term LORENTZ transformations, where in fact older; already in 1887 W. VOIGT had observed that the wave equation of the elastic theory of light was invariant with respect to this type of transformations. LORENTZ has further shown that if the interaction of matter and light was regarded to be due to electrons imbedded in the substance all observations concerning effects of the first order in $\beta = v/c$ (v = velocity of matter, c = velocity of light) could be explained, in particular the fact that no first order

effect of the movement of matter could be discovered by an observer taking part in the motion. But there were some very accurate experiments such as that performed by MICHELSON first in 1881 in Potsdam, and repeated with higher accuracy in America in 1887 by MICHELSON and MORLEY, which showed that no effect of the earth motion could be found even to the second order in β. To explain this FITZ GERALD invented in 1892 the *contraction hypothesis* which was at once taken up by LORENTZ and included into his system. Thus LORENTZ obtained a set of field equations for moving bodies which was in agreement with all known observations; it was relativistic invariant for processes in empty space, and approximately invariant (up to terms of 1st order in β) for material bodies. Still LORENTZ stuck to his aether at rest and the traditional absolute time. I shall return to this point presently. When HENRI POINCARÉ took up this investigation, he went a step further. In regard to his work I refer to the excellent book by Sir EDMUND WHITTAKER, A History of the Theories of Aether and Electricity, which was already in use as a guide in my student times. It has now been completely re-written. The second volume of the new edition deals with 'The Modern Theories, 1900–1926'; there you can find quotations from POINCARÉS papers, some of which I have looked up in the original. They show that as early as 1899 he regarded it as very probable that absolute motion is indetectable in principle and that no aether exists. He formulated the same ideas in a more precise form, though without any mathematics, in a lecture given in 1904 to a Congress of Arts and Science at St. Louis, USA., and he predicted the rise of a new mechanics which will be characterised above all by the rule, that no velocity can exceed the velocity of light.

WHITTAKER was so impressed by these statements, that he gave to the relevant chapter in his book the title 'The Relativity Theory of POINCARÉ and LORENTZ'. EINSTEIN'S contributions appear there as being of minor importance.

I have tried to form an opinion about this question from my own recollections and with the help of a few publications available to me.

In the happy years before the first World War the Academy of Göttingen had a considerable fund, called the WOLFSKEHL--Stiftung (W.-Foundation) which was given originally with the direction to award a prize of 1000.000 Marks for the proof of FERMAT'S celebrated 'Great Theorem'. Hundreds of letters, or even just postcards, arrived every year claiming to contain the solution, and the mathematicians were kept busy to discover the error. The futility of this process became so annoying that it was decided to use the money for other more useful purposes, namely to invite distinguished scholars to lecture on current scientific problems. One of these series of lectures was given by HENRI POINCARÉ, 22nd –

28th April 1909, and has been published as a book by TEUBNER in 1910. I have attended these POINCARÉ-Festspiele (P.-Festival), as we called it, and now refreshed my memory by looking through the book. The first 5 lectures dealt with purely mathematical problems; the 6th lecture had the title 'La mécanique nouvelle'. It is a popular account of the theory of relativity without any formulae and with very few quotations. EINSTEIN and MINKOWSKI are not mentioned at all, only MICHELSON, ABRAHAM and LORENTZ. But the reasoning used by POINCARÉ was just the same, which EINSTEIN introduced in his first paper of 1905, of which I shall speak presently. Does this mean that POINCARÉ knew all this before EINSTEIN? It is possible, but the strange thing is that this lecture gives you definitely the impression that he is recording LORENTZ's work.

On the other hand LORENTZ himself has never claimed to be the author of the principle of relativity. The year after POINCARÉ's visit to Göttingen we had the LORENTZ-Festspiele. I, at the time a young Privatdocent, was appointed temporary assistant to the distinguished guest and charged with taking notes of the lectures and preparing them for publication. Thus I was priviledged with having daily discussions with LORENTZ. The lectures have appeared in Physikalische Zeitschrift (vol. 11, 1910, p. 1234). The second lecture begins with the words: 'Das EINSTEINsche Relativitätsprinzip hier in Göttingen zu besprechen, wo MINKOWSKI gewirkt hat, erscheint mir eine besonders willkommene Aufgabe.' 'To discuss EINSTEIN's Principle of Relativity here in Göttingen where MINKOWSKI has taught appears to me a particularly welcome task'. This suffices to show that LORENTZ himself regarded EINSTEIN as the discoverer of the principle of relativity. On the same page and also in the following sections are other remarks which reveal LORENTZ's reluctance to abandon the ideas of absolute space and time. When I visited LORENTZ a few years before his death, his scepticism had not changed.

I have told you all these details because they illuminate the scientific scene of 50 years ago, not because I think that the question of priority is of great importance.

May I now return to my own struggle with the relativity problem. After having graduated (Dr. phil.) in Göttingen I went in 1907 to Cambridge to learn something about the electron on the source. J. J. THOMSON's lectures were very stimulating indeed, he showed brilliant experiments. But LARMOR's theoretical course did not help me very much; I found it very hard to understand his Irish dialect, and what I understood seemed to me not on the level of MINKOWSKI's ideas. I then returned to my home city Breslau, and there at last I heard the name of EINSTEIN and read his papers. I was working at that time on a relativistic problem, which was an offspring of MINKOWSKI's seminar, and talked about it to

my friends. One of them, STANISLAUS LORIA, a young Pole, directed my attention to EINSTEIN's articles, and thus I read them. Although I was quite familiar with the relativistic idea and the LORENTZtransformations, EINSTEIN's reasoning was a revelation to me.

Many of you may have looked up his paper 'Zur Elektrodynamik bewegter Körper' in Annalen der Physik (4), vol. 17, p. 811, 1905, and you will have noticed some pecularities. The striking point is that it contains not a single reference to previous literature. It gives you the impression of quite a new venture. But that is of course, as I have tried to explain, not true. We have EINSTEIN's own testimony. Dr. CARL SEELIG, who has published a most charming book on 'EINSTEIN und die Schweiz' asked EINSTEIN which scientific literature had contributed most to his ideas on relativity during his period in Bern, and received an answer on Febr. 19 of this year which he published in the Technische Rundschau (N. 20, 47. Jahrgang, Bern 6. Mai 1955); EINSTEIN wrote: 'Es ist zweifellos, daß die spezielle Relativitätstheorie, wenn wir ihre Entwicklung rückschauend betrachten, im Jahre 1905 reif zur Entdeckung war. LORENTZ hatte schon erkannt, daß für die Analyse der MAXWELLschen Gleichungen die später nach ihm benannte Transformation wesentlich sei, und POINCARÉ hat diese Erkenntnis noch vertieft. Was mich betrifft, so kannte ich nur LORENTZ' bedeutendes Werk von 1895 – "La théorie électromagnétique de MAXWELL" und "Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" – aber nicht LORENTZ' spätere Arbeiten, und auch nicht die daran anschließende Untersuchung von POINCARÉ. In diesem Sinne war meine Arbeit von 1905 selbständig.

Was dabei neu war, war die Erkenntnis, daß die Bedeutung der LORENTZ-Transformation über den Zusammenhang mit den MAXWELLschen Gleichungen hinausging und das Wesen von Raum und Zeit im allgemeinen betraf. Auch war die Einsicht neu, daß die "LORENTZ-Invarianz" eine allgemeine Bedingung sei für jede physikalische Theorie. Das war für mich von besonderer Wichtigkeit, weil ich schon früher erkannt hatte, daß die MAXWELLsche Theorie die Mikrostruktur der Strahlung nicht darstelle und deshalb nicht allgemein haltbar sei –.'

Translated:

'There is no doubt, that the special theory of relativity, if we regard its development in retrospect, was ripe for discovery in 1905. LORENTZ had already observed that for the analysis of MAXWELL's equations the transformation which later were known by his name are essential, and POINCARÉ had even penetrated deeper in these connections. Concerning myself, I knew only LORENTZ's important work of 1895 (the two papers quoted above in the German text) but not LORENTZ's later work, nor the consecutive investigations by POINCARÉ. In this sense my work of 1905

was independent. The new feature of it was the realisation of the fact that the bearing of the LORENTZ-transformations transcended their connection with MAXWELL's equations and was concerned with the nature of space and time in general. A further new result was that the "LORENTZ invariance" is a general condition for any physical theory. This was for me of particular importance because I had already previously found that MAXWELL's theory did not account for the micro-structure of radiation and could therefore have no general validity –'.

This makes, I think, the situation perfectly clear. The last sentence of this letter is of particular importance. For it shows, that EINSTEIN's papers of 1905 on relativity and on the light quantum were not disconnected. He believed already then that MAXWELL's equations were only approximately true, that the actual behaviour of light was more complicated and ought to be described in terms of light quanta (photons, as we say to-day), but that the principle of relativity was more general and should be founded on considerations which would be still valid when MAXWELL's equations had to be discarded and replaced by a new theory of the fine structure of light (our present quantum electrodynamics).

The second peculiar feature of this first relativity paper by EINSTEIN is his point of departure, the *empirical facts* on which he built his theory. It is of surprising simplicity. He says that the usual formulation of the law of induction contains an asymmetry which is artificial and does not correspond to facts. According to observation the current induced depends only on the relative motion of the conducting wire and the magnet while the current theory explains the effect in quite different terms according to whether the wire is at rest and the magnet moving or vice versa. Then there follows a short sentence referring to the fact that all attempts to discover experimentally the movement of the earth through the aether have failed. It gives you the impression that MICHELSON's experiment was not so important after all, and that EINSTEIN would have arrived at his relativity principle in any case.

This principle, together with the postulate that the velocity of light is constant, independent of the system of reference, are the only assumptions from which the whole theory is derived on a few pages. The first step is the demonstration that absolute simultaneity of two events at different places has no physical meaning. Then relative simultaneity is defined by setting the clocks at different places in a system of reference in such a way that a light signal needs the same time either way between two of them. This definition leads directly to the LORENTZ-transformations and all their consequences: the LORENTZ-FITZ GERALD contraction, the time dilation, the addition theorem of velocities, the transformation law for the electromagnetic field components in vacuum, the DOPPLER principle, the

aberration effect, the transformation law for energy, the equations of motion for an electron and the formulae for the longitudinal and transversal mass as functions of the velocity.

But for me – and many others – the exciting feature of this paper was not so much its simplicity and completeness, but the audacity to challenge Isaac Newton's established philosophy, the traditional concepts of space and time. That distinguishes Einstein's work from his predecessors and gives us the right to speak of Einstein's theory of relativity, in spite of Whittaker's different opinion.

Einstein's second paper on relativity 'Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?' (Ann. d. Phys. (4), vol. 18, 1905, p. 639) contains on three pages a proof of the celebrated formula $E = mc^2$ expressing the equivalence of mass and energy, which has turned out to be of fundamental importance in nuclear physics, for the understanding of the structure of matter and of the source of stellar energy as well, and for the technical exploitation of nuclear energy, for bad or good. This paper also has become the object of priority disputes. In fact, the formula had been known for special cases; for instance the Austrian physicist F. Hasenöhrl had shown already in 1904 that electromagnetic radiation enclosed in a vessel produced an increase of its resistance to acceleration, i. e. its mass, proportional to the radiation energy. Hasenöhrl was killed in the first World War and could not object when his name was later misused to discredit Einstein's discovery. However, I shall not enter into an account of this sordid story. I have mentioned these matters only to make it clear that special relativity was, after all, not a one-man discovery. Einstein's work was the keystone to an arch which Lorentz, Poincaré and others have built and which was to carry the structure, erected by Minkowski. I think it wrong to forget these other men, as it happens in many books. Even Philipp Frank's excellent biography 'Einstein, Sein Leben und seine Zeit', cannot be acquitted of this reproach, e. g. when he says (in Chap. 3, No. 6 of the German edition) that nobody before Einstein had ever considered a new type of mechanical law in which the velocity of light plays a prominent part. Both Poincaré and Lorentz have been aware of this, and the relativistic expression for the mass (which contains c) has rightly been called Lorentz formula.

To-day this formula is taken so much for granted, that you can hardly imagine the acerbity of the controversies which raged around it. In 1901 W. Kaufmann in Göttingen had, by an investigation of the electromagnetic deflection of fast cathod rays, first established the fact that the mass of the electron depends on its velocity. Max Abraham, whom I have mentioned already, took up this challenge to the theoreticians and showed that the electromagnetic mass, as introduced by J. J. Thomson, i.e. the

self-energy of the electron's own field, properly developed for high velocities did indeed depend on velocity. He assumed the electron to be a rigid sphere; but later he also modified his theory by taking account of the LORENTZ-FITZ GERALD contraction, and obtained exactly the formula which LORENTZ had already found by a simpler reasoning. As a matter of fact, the velocity dependence of energy and of mass has nothing at all to do with the structure of the body considered, but is a general relativistic effect. Before this became clear, many theoreticians wrote voluminous, not to say monstrous papers on the electromagnetic selfenergy of the rigid electron, G. HERGLOTZ, P. HERTZ, A. SOMMERFELD a. o. My first scientific attempt was also in this direction; however I did not assume the electron to be rigid in the classical sense, but tried to define relativistic rigidity by generalising the LORENTZ electron for accelerated motion, with the help of the methods I had learned from MINKOWSKI.

To-day all these efforts appear rather wasted; quantum theory has shifted the point of view, and at present the tendency is to circumvent the problem of selfenergy rather than to solve it. But one day it will return to the centre of the scene.

MINKOWSKI published his paper 'Die Grundlagen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern' in 1907. It contained the systematic presentation of his formal unification of space and time into a four-dimensional 'world' with a pseudo-euclidean geometry, for which a vector- and tensor-calculus is developed. This calculus, with some modifications, soon became the standard method of all relativistic investigations. Moreover MINKOWSKI's paper contained important new results: a set of equations for the electromagnetic field in moving material bodies which is exactly invariant with respect to LORENTZ transformation, not only in a first approximation as LORENTZ's slightly different equations; further a new approach to the mechanical equations of motion.

In the beginning of 1908 I had the audacity to send my manuscript on the electron to MINKOWSKI, and he was kind enough to answer. On September 21st of the same year I listened at Cologne to his famous lecture 'Raum und Zeit', in which he explained his ideas in popular form to the members of the Naturforscher-Versammlung. He invited me to come to Göttingen and to join him in further work. So I did; but alas, after a few weeks our collaboration ended through MINKOWSKI's sudden death. It fell to me to sift his unpublished papers, one of which I succeeded to reconstruct and to publish.

My first meeting with EINSTEIN happened in the following year, 1909, at the Naturforscher-Versammlung in Salzburg. There EINSTEIN gave a lecture with the title 'Über die neueren Umwandlungen, welche unsere Anschauungen über die Natur des Lichtes erfahren haben', which means

obviously the introduction of the light quantum. I also gave a talk 'Die Dynamik des Elektrons im System des Relativitätsprinzips'. This seems to me rather amusing: Einstein had already proceeded beyond special relativity which he left to minor prophets, while he himself pondered about the new riddles arising from the quantum structure of light, and of course about gravitation and general relativity which however was not ripe for general discussion.

From this time on I saw Einstein occasionally at conferences and exchanged a few letters with him. He became professor at the University of Zürich in 1909, than at Prague in 1910 and returned to Zürich, as professor at the Polytechnicum in 1912. Already in the following year he went to Berlin, where the Prussian Academy had offered him a special chair, vacated by the death of vant Hoff, with no teaching obligations, and with other privileges. This invitation was mainly due to the efforts of Max Planck who was deeply interested in relativity and had contributed important papers on relativistic mechanics and thermodynamics. Two years later, in spring 1915, I was also called to Berlin by Planck, to assist him in his teaching. The following four years have been amongst the most memorable of my life, not because the first World War was raging with all its sorrows, excitements, privations and indignities, but because I was near to Planck and Einstein.

It was the only period when I saw Einstein very frequently, at times almost daily, and when I could watch the working of his mind and learn his ideas on physics and on many other subjects.

It was the time when general relativity was finally formulated. Now this was, in contrast to the special theory, a real one-man work. It began with a paper published as early as December 1907, which contains the principle of equivalence, the only empirical pillar on which the whole imposing structure of general relativity was built.

When speaking of the physical facts which Einstein used in 1905 for his special relativity I said that it was the law of electromagnetic induction which seemed to have guided Einstein more than even Michelson's experiment. Now the induction law was at that time about 70 years old (Faraday discovered it in 1834), everybody had known all along that the effect depended only on relative motion, but nobody had taken offence at the theory not accounting for this circumstance.

Now the case of the equivalence principle is very similar, only that the critical empirical fact had been known by everybody far longer, namely about 250 years. Galileo had found that all bodies move with the same acceleration under terrestrial gravity, and Newton generalised this for the mutual gravitational attraction of celestial bodies. This fact, namely that

the inertial and the gravitational mass are equal was taken as a peculiar property of NEWTON'S force, and nobody seems to have pondered about it.

Special relativity had restored the special role and the equivalence of the inertial systems of Newtonian mechanics for the whole of physics; absolute motion was indetectable as long as no accelerations occurred. But the inertia effects, the centrifugal forces and corresponding electromagnetic phenomena, which appear in accelerated, for instance rotating, systems could be described only in terms of absolute space. This seemed to be intolerable to EINSTEIN. Brooding over it, he noticed that the equality of inertial and gravitational mass implied that an observer in a closed box could not decide whether a non-uniformity of the motion of a body in the box was due to an acceleration of the whole box or to an external gravitational field. This gave him the clue for general relativity. EINSTEIN postulated that this equivalence should hold as a general principle for all natural phenomena not only mechanical motion. Thus he arrived in 1911 at the conclusion that a beam of light must be bent in a gravitational field and suggested at once that his simple formula of deflexion could be experimentally checked by observing the position of fixed stars near the sun during a total eclipse.

The actual development of the theory was a tremendous task, for a new branch of mathematics, quite unfamiliar to physicists, had to be used. Some more conservative physicists, ABRAHAM, MIE, NORDSTRÖM and others tried to develop from EINSTEINS equivalence principle a coherent scalar theory of the gravitational field, with little success. EINSTEIN himself was the only one who discovered the right mathematical tool in RIEMANN'S geometry, as extended by RICCI and LEVI-CIVITÀ, and he found in his old friend MARCEL GROSSMANN a skilful collaborator. But it took several years, until 1915, to finish this work.

I remember that on my honey moon in 1913 I had in my luggage some reprints of EINSTEIN'S papers which absorbed my attention for hours, much to the annoyance of my bride. These papers seemed to me fascinating, but difficult and almost frightening. When I met EINSTEIN in Berlin in 1915 the theory was much improved and crowned by the explanation of the anomaly of the perihelion of Mercury, discovered by LEVERRIER. I learned it not only from the publications but from numerous discussion with EINSTEIN, – which had the effect that I decided never to attempt any work in this field. The foundation of general relativity appeared to me then, and it still does, the greatest feat of human thinking about Nature, the most amazing combination of philosophical penetration, physical intuition and mathematical skill. But its connections with experience were slender. It appealed to me like a great work of art, to be enjoyed and admired from a distance.

According to my interpretation of the title of this lecture I shall not enter into a discussion of the empirical confirmation of the special and the general theory of relativity, as I am no expert, and as others have spoken on it already. I shall only just mention the most striking events.

In 1915 SOMMERFELD's relativistic theory of the fine structure of the hydrogen lines was published. It is based on the mathematical result, that the dependence of mass on velocity produces a precession of the perihelion of the elliptic orbit. It is quite interesting that POINCARÉ had already considered this effect to explain LEVERRIER's anomaly in the motion of the planet Mercury; a remark about this is contained in POINCARÉ's lecture in Göttingen quoted before. The result was of course negative, as the velocity of Mercury is much too small compared with that of light. It is different with the electron moving around a nucleus, and this led, in combination with the quantization laws of BOHR and SOMMERFELD, to the explanation of the splitting of the hydrogen lines.

The modern version of the theory of the hydrogen spectrum is based on DIRAC's relativistic wave equation and has recently been much refined with the help of quantum electrodynamics.

Another striking result of relativity combined with EINSTEIN's idea of light quanta is the theory of the COMPTON effect.

The time dilation effect was directly confirmed as the transversal DOPPLER effect in hydrogen canal rays in 1938 by IVES and STILVELL, and with higher accuracy in 1939 by RÜCHARDT and OTTING. It plays an important part in the modern research on mesons in cosmic rays where the observed life time of a meson may be a hundred times as large as the intrinsic one, in consequence of the large velocities.

At present special relativity is taken for granted, the whole of atomic physics is so merged with it, so soaked in it, that it would be quite meaningless to pick out particular effects as confirmations of EINSTEIN's theory. The situation in general relativity is different; all the three effects predicted by EINSTEIN exist, but the question of quantitative agreement between the theory and observation is for the two optical effects still under discussion. However the importance of general relativity lies in the revolution which it has produced in *cosmology*. It started in 1917 when EINSTEIN generalised his field equations by adding the so-called cosmological term and showed that a solution exists representing a closed universe. This suggestion of a finite, but unbounded space is one of the very greatest ideas about the nature of the world which ever have been conceived. It solved the mysterious fact why the system of stars did not disperse and thin out which it would do if space were infinite; it gave a physical meaning to MACH's principle which postulated that the law of inertia should not be regarded as a property of empty space but as an

effect of the total system of stars, and it opened the way to the modern concept of the expanding universe. Here general relativity found again contact with observation through the work of the astronomers SHAPLEY, HUBBLE and many others. To-day cosmology is an extented science which produced innumerable publications and books, of which I know little. Thus I am compelled to omit just that aspect of EINSTEIN's work which may be regarded as his greatest achievement.

May I instead tell you something about my personal relations with EINSTEIN in those by-gone days and about the divergence of opinion which arose in the end between us in regard to the ultimate principles of physics.

The discussions which we had in Berlin ranged far beyond relativity, and even beyond physics at large. As the first World War was going on politics played of course a central part. But much as I would like to speak about these things I have to restrict myself to physics.

EINSTEIN was at that time working with DE HAAS on experiments about the so-called gyromagnetic effect, which proved the existence of AMPÈRES molecular currents. He was also deeply interested in quantum theory and worried by its paradoxes.

In 1919 I became v. LAUES successor at Frankfurt, and my companionship with EINSTEIN ceased. But we visited one another often and had a lively correspondence, of which I shall give you a few examples. It was the time when EINSTEIN became suddenly world famous, and his theory as well as his personality the object of fanatical controversy.

Just before the war German astronomers had gone to Russia to investigate EINSTEIN's prediction of the deflexion of light by the sun during an eclipse; they were stopped by the outbreak of hostilities, and became prisoners of war. Now after the war two British expeditions went out for the same purpose, under the direction of SIR ARTHUR EDDINGTON, and they were successful. It is quite impossible to describe the stir which this event produced in the whole world. EINSTEIN became at once the most famous and popular figure, the man who had broken through the wall of hatred and united the scientists to a common effort, the man who had replaced ISAAC NEWTON's system of the world by another and better one. But at the same time an opposition, which had already been apparent while I was in Berlin, grew under the leadership of PHILIPP LENARD and JOHANNES STARK. It was springing from the most absurd mixture of scientific conservatism and prejudice with racial and political emotions, due to EINSTEIN's Jewish descent and pacifistic, antimilitaristic convictions. Here a few samples from EINSTEIN's letters; one of June 4^{th}, 1919, begins with physics:

'. . . Die Quantentheorie löst bei mir ganz ähnliche Empfindungen aus wie bei Ihnen. Man müßte sich eigentlich der Erfolge schämen, weil sie nach dem jesuitischen Grundsatze gewonnen sind: "Die eine Hand darf nicht wissen, was die andre tut . . ." '.

'. . . The quantum theory provokes in me quite similar sensations as in you. One ought really to be ashamed of the successes, as they are obtained with the help of the Jesuitic rule: "One hand must not know what the other does".'

and then, a few lines below, he continues about politics:

'. . . Darf ein hartgesottener X-Bruder und Determinist mit thränenfeuchten Augen sagen, daß er den Glauben an die Menschen verloren hat? Gerade das triebhafte Verhalten der Menschen von heute in politischen Dingen ist geeignet, den Glauben an den Determinismus recht lebendig zu machen . . .'.

'. . . Can a hardboiled X-brother (= mathematician; we used the expression "ixen", to "x", for "calculating") say with tears in his eyes that he has lost his faith in the human race? Just the instinctive behaviour of contemporary people in political affairs is suited to revive the belief in determinism . . .'.

You see that his deterministic philosophy which later created a gulf between him and the majority of physicists was not restricted to science but extended to human affairs as well.

At this time the inflation in Germany began to become serious. In my department Stern and Gerlach were preparing their well known experiments, but hampered by the lack of funds. I decided to give a series of popular lectures on relativity with an entrance fee, using the general craze for information about this subject to raise funds for our researches. The plan was successful, the lectures were crowded, and when they appeared as a book, three editions were quickly sold. Einstein acknowledged my efforts by offering me the friendly 'Du' instead of the formal 'Sie' in a letter of Nov. 9th, 1919, which also contains some suggestion how the Jews should react to the antisemitic drive going on:

'Also von jetzt ab soll Du gesagt werden unter uns, wenn Du es erlaubst . . . Ich würde es für vernünftig halten, wenn die Juden selbst Geld sammelten, um jüdischen Forschern außerhalb der Universitäten Unterstützung und Lehrgelegenheit zu bieten . . .'

'Well, from now on the "Thou" shall be used between us, if you agree... I should think it reasonable if the Jews themselves would collect money in order to give Jewish scholars financial support and teaching opportunity outside of the universities . . .'

There appeared attacks against Einstein by well known scientists and philosophers in the Frankfurter Zeitung which arosed my pugnacity. I

answered in a rather sharp article. EINSTEIN seems to have been pleased with it. He wrote on Dec. 9th, 1919:

'Dein ausgezeichneter Artikel in der Frankfurter Zeitung hat mich sehr gefreut. Nun aber wirst Du, gerade wie ich, wenn auch in schwächerem Maßstab, von Presse- und sonstigem Gelichter verfolgt. Bei mir ist es so arg, daß ich kaum mehr schnaufen, geschweige zu vernünftiger Arbeit kommen kann . . .'

'Your excellent article in the Frankfurter Zeitung has given me great pleasure. Now you as well as I will be persecuted by gangs of pressmen and others though to a smaller degree. With me it is so bad that I can hardly breathe any more, to say nothing of doing reasonable work . . .'

And about a year later (Sept. 9th, 1920):

' . . . Wie bei dem Mann im Märchen alles zu Gold wurde, was er berührte, so wird bei mir alles zum Zeitungsgeschrei: Suum cuique . . .'

' . . . Just as with the man in the fairy tale everything touched was transformed into gold, with me everything becomes newspaper noise. Suum cuique . . .'

If you are interested in that curious period when the whole world was excited about a physical theory which nobody understood, and when everywhere people were split into pro- and contra EINSTEIN factions you can find an excellent account in the biography by PHILIPP FRANK quoted before.

However, scientific problems regained their proper place in our correspondence. In the same year (March 3th, 1920) EINSTEIN wrote:

'Ich brüte in meiner freien Zeit immer über dem Quantenproblem vom Standpunkte der Relativität. Ich glaube nicht, daß die Theorie das Kontinuum wird entbehren können. Es will mir aber nicht gelingen, meiner Lieblingsidee, die Quantentheorie aus einer Überbestimmung durch Differentialgleichungen zu verstehen, greifbare Gestalt zu geben . . .'

'I always brood in my free time about the quantum problem from the standpoint of relativity. I do not think that the theory will have to discard the continuum. But I was unsuccessful, so far, to give tangible shape to my favourite idea, to understand the quantum theory with the help of differential equations by using conditions of over-determination . . .'

Already at that time we discussed whether quantum theory could be reconciled with causality. Here a sentence from EINSTEIN'S letter of Jan. 27th, 1920:

' . . . Das mit der Kausalität plagt mich auch viel. Ist die quantenhafte Licht-Absorption und -Emission wohl jemals im Sinne der vollständigen Kausalitätsforderung erfaßbar oder bleibt ein statistischer Rest? Ich muß gestehen, daß mir da der Mut einer Überzeugung fehlt. Ich verzichte aber sehr, sehr ungern auf *vollständige* Kausalität . . .'

'That question of causality worries me also a lot. Will the quantum absorption and emission of light ever be grasped in the sense of complete causality, or will there remain a statistical residue? I have to confess, that I lack the courage of a conviction. However I should be very, very loath to abandon *complete* causality . . .'

From that time on our scientific ways parted more and more. I went to Göttingen and came in contact with NIELS BOHR, PAULI and HEISENBERG. When in 1926 quantum mechanics was developed I hoped of course that EINSTEIN would agree, but was disappointed. Here a quotation from one of his letters (Dec. 12th, 1926).

'. . . Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das doch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt . . . Ich plage mich damit herum, die Bewegungsgleichungen von als Singularitäten aufgefaßten materiellen Punkten aus den Differentialgleichungen der allemeinen Relativität abzuleiten . . .'

'The quantum mechanics is very imposing. But an inner voice tells me that it is still not the true Jacob (a German colloquialism). The theory yields much, but it hardly brings us nearer to the secret of the Old one. In any case I am convinced that he does not throw dice . . . I am toiling at deriving the equations of motion of material particles regarded as singularities from the differential equations of general relativity . . .'

The last sentence refers to a paper which was finished much later at Princeton in collaboration with BENESH HOFFMANN and LEOPOLD INFELD, EINSTEIN's last great contribution to relativity. The assumption made in the original theory, that a free particle (e.g. a celestial body) moves on a geodesic turned out to be unnecessary, it could be derived from the field equations by a subtle procedure of successive approximations. These very deep and important investigations have been further developed by FOCK and INFELD.

The first part of the letter quoted refers to EINSTEIN's refusal to accept statistical laws in physics as final; he speaks of the dice playing god, an expression which he has used later very often in discussions and letters.

During the last period of his life in Princeton he concentrated all his powers and energies to develop a new foundation of physics in conformity with his fundamental philosophical convictions, namely that it must be possible to think of the external world as existing independently of the observing subject, and that the laws governing this objective world are strictly causal, in the sense of deterministic. This was the aim of his unified field theories, of which he published several versions, always hoping

that the quantum phenomena would in the end turn out to be a consequence of his field equations.

I cannot say much about these attempts, as right from the beginning I just did not believe in their success and therefore did not study his difficult papers with sufficient care. I think that quantum mechanics has followed up EINSTEIN's original philosophy, which led him to tremendous success, more closely than he did himself in his later period.

What is the lesson we learned from him? He himself has told us that he learned it from ERNST MACH, and therefore the positivists have claimed him to be one of them. I do not think that this is true, if positivism is the doctrine that the purpose of science is the description of interrelations of sense impressions. EINSTEIN's leading principle was simply that something of which you could think and form a concept, but which from its very nature could not be submitted to an experimental test (like the simultaneity of events at distant places) has no physical meaning.

The quantum effects showed that this holds for a great many concepts of atomic physics, but EINSTEIN refused to apply his criterion to these cases. Thus he rejected the current interpretation of quantum mechanics though it follows his own general teaching, and tried quite a different way, rather remote from experience. He had achieved his greatest success by relying on just *one* empirical fact known to every schoolboy. Yet now he tri d to do without any empirical facts, by pure thinking. He believed in theepower of reason to guess the laws according to which God has built the wo rld. He was not alone in this conviction. One of the principal exponents of it was EDDINGTON in his later papers and books. In 1943 I publish ed a pamphlet with the title 'Experiment and Theory in Physics' (Cambridge University Press) in which I tried to analyse the situation and to refute EDDINGTON's claims. I sent a copy to EINSTEIN and received a very interesting reply which I have unfortunately lost; but I remember a phrase like this: 'Your thundering against Hegelism is quite amusing, but I shall continue with my endeavours to guess God's ways.' A man of EINSTEIN's greatness who has achieved so much by thinking, has the right to go to the limit of the a priori method. Current physics has not followed him; it has continued to accumulate empirical facts, and to interpret them in a way which EINSTEIN thoroughly disliked. For him a potential or a field component was a real natural object which changed according to definite deterministic laws. Modern physics operates with wave functions which, in their mathematical behaviour, are very similar to classical potentials but do not represent real objects. They serve for determining the *probability* of finding real objects, whether these are particles, or electromagnetic potentials, or other physical quantities. EINSTEIN made many attempts to prove the inconsistency of this theory

with the help of ingenious examples and models, and NIELS BOHR took infinite trouble to refute these attacks; he has given a charming report about his discussions with EINSTEIN in the book EINSTEIN, Philosopher-Scientist, (The Library of Living Philosophers, Vol. 7).

I saw EINSTEIN the last time about 1930, and although our correspondence continued I feel not competent to speak about the last phase of EINSTEIN'S life and work. I hope that Professor PAULI will tell us something about it. I conclude my address by apologizing that it was so long. But my friendship with EINSTEIN was one of the greatest experiences of my life, and 'Ex abundantia enim cordis os loquitur', or as the Scots say: 'Neirest the heart, neirest the mouth'.

Schlußwort durch den Präsidenten der Konferenz

Prof. Dr. W. Pauli

Geehrte Anwesende,

ich werde dieses Schlußwort auf Deutsch halten, weil dadurch vielleicht eine gewisse Symmetrie in den Sprachen hergestellt wird und auch, weil ich in dieser Sprache leichter improvisieren kann und meine Worte weniger offiziell klingen.

Bevor ich auf den Inhalt eingehe, möchte ich bei dieser Gelegenheit allen denen danken, die bei der Organisation dieses Kongresses so viel Mühe und Arbeit getan haben. Insbesondere danke ich dem Sekretär der Konferenz, Prof. Mercier, ohne dessen mühsame und ausdauernde Arbeit dieser Kongress gar nicht möglich gewesen wäre.

Ich kann ja nicht alle Referate wiederholen, und so muß ich mich wohl darauf beschränken, einige vielleicht willkürlich ausgewählte Bemerkungen zu machen über verschiedene Seiten der Probleme, die wir hier diskutiert haben und über die wir teils Hauptreferate, teils kleinere Mitteilungen gehört haben. Falls ich etwas Unkorrektes sage, haben Sie leider nur mehr Gelegenheit, mich im privaten Gespräch zu korrigieren.

Ich möchte einiges sagen über meine Eindrücke aus den Referaten und Diskussionen dieses Kongresses über die experimentelle Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie, die Kosmologie, die mathematischen Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie, die Erweiterungen der Theorie und über die Quantisierung der Feldgleichungen. Vielleicht kann ich auch die Gelegenheit benützen, um einiges zu sagen, was ich in der Diskussion aus Zeitgründen nicht mehr sagen konnte.

Ich habe nicht sehr viel hinzuzufügen zur Frage der *experimentellen Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie:* Sie haben das Hauptreferat von Herrn Trümpler gehört und auch das Minoritätsvotum von Herrn Freundlich. Nun mögen Sie sich selbst ein Urteil bilden über diese Diskrepanz, da ich ja nicht Experte bin in technischer Astronomie. Ich darf vielleicht nur, ohne Stellung zu nehmen, darauf hinweisen, daß die Klassen-Einteilung je nach dem Eindruck, welchen diese Referate gemacht haben, nicht einfach zusammenfiel mit der Klassen-

Einteilung nach Wärme oder Kühle der Einstellung zur Relativitätstheorie. Es waren daran auch viele beteiligt, denen nicht die ganze Theorie so primär am Herzen liegt, sondern die experimentellen Methoden. Mehr kann ich nicht sagen über die Rotverschiebung und die Lichtablenkung.

Etwas mehr kann ich wohl sagen über die *Kosmologie.* Wir haben das experimentelle Referat Baade und das theoretische Referat Robertson gehört, und es hat sich das neue Resultat ergeben, daß keine Diskrepanz zwischen den experimentellen Resultaten und dem alten Friedmann-Lemaîtreschen kosmologischen Modell besteht. Die experimentellen Ergebnisse zeigen, daß man keine Spuren in unserem Universum finden kann, die auf eine frühere Zeit als auf 5.10^9 Jahre hinweisen oder zurückgehen. Was vorher war, das wissen wir nicht, und das, was man sieht, ist manchmal jünger aber niemals älter als diese 5.10^9 Jahre. Die Relativitätstheorie und die Friedmannsche Lösung verknüpfen dieses Weltalter mit der mittleren Dichte der Materie in der Welt. Ich glaube, wir sollen uns Einsteins Meinung anschließen, wonach das kosmologische Glied gleich Null zu setzen ist. Von Robertson haben wir gehört, daß dann auch eine genügende Übereinstimmung zwischen der empirischen Sterndichte und dem Alter 5.10^9 mit den theoretischen Relationen besteht. Das war früher anders, und es scheint mir, daß damit ein auch in der neuen Auflage von Jordans Buch ,,Schwerkraft und Weltall" zu findendes Argument gegen diese einfache Theorie, das immer schon schwach war, nun praktisch auf Null zusammengeschmolzen ist; und das ist in vieler Hinsicht erfreulich. Ich komme auf diese Frage später noch zurück bei den Erweiterungen der Theorie. In Verbindung mit der Kosmologie gibt es noch fundamentalere Fragen, auf die ich hier nur kurz hinweisen kann. Es scheint mir wesentlich, daß die Erhaltungssätze von Materie, also von Energie-Impuls und von Ladung einer mathematisch formulierten Feldtheorie tief in den Knochen sitzen. Wenn man daran etwas ändern will, muß man wohl schon eine fundamentale Idee haben. Ich bestreite nicht, daß in der Natur es vielleicht doch auch so sein könnte, daß diese Erhaltungssätze irgendwie nicht gelten würden im Sinne einer creatio continua, wie ich es lateinisch sagen will (die creatio continua ist nämlich eine alte Vorstellung aus dem Mittelalter), und es liegt auch eine gewisse Schönheit darin, einen stationären Zustand anzunehmen. Ich glaube aber, das ist ein Problem, das wir der Zukunft zur Entscheidung überlassen müssen, wie so vieles, was hier besprochen wurde. Ob nun im Sinne der jetzigen Theorie mit ihren Erhaltungssätzen oder im Sinne eines stationären Zustandes mit ihrer creatio continua der Kosmos zu deuten ist, so scheint es mir aber auf jeden Fall mehr im Sinne der theoretischen Physik mit ihrer Anlehnung an bestimmte mathematische Gleichungen, wenn

wir einen Grundstein wie die Erhaltungssätze nicht eher verlassen, als bis eine ganz bestimmte experimentelle Evidenz uns dazu zwingt. Gegen die logische Möglichkeit will ich gar nichts sagen. Aber es scheint mir eigentlich besser, nicht ad libitum Grundlagen wegzuwerfen, solange man nicht empirisch dazu gezwungen ist; und wenn ich richtig verstanden habe, ist man bis jetzt empirisch nicht dazu gezwungen, Erhaltungssätze aufzugeben. Das, was früher als 5.10^9 Jahre war, bleibt dabei natürlich im Dunkel. EINSTEIN hat darüber nur gesagt, die Materie war früher in einem solchen Zustand, den wir vorläufig nicht weiter berechnen können.

Ich glaube, das Wichtigste, das wir sonst gehört haben, war das Referat von LICHNEROWICZ über das *Cauchysche Anfangswertproblem* in den nichtlinearen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Ich lege sehr großen Wert auf das Studium dieser Probleme, weil ich bestimmt meine, daß es auch bei der Feldquantisierung, auf die ich zu sprechen komme, eine wesentliche Rolle spielen wird. Ich zweifle auch nicht daran, daß Herr LICHNEROWICZ unabhängig von JORDAN viele mathematische Sätze, über die uns Herr JORDAN vorgetragen hat, auch schon gefunden hat, wie er sagt.

Ich will nun noch auf einige speziellere Fragen eingehen, welche mehr in den kleineren Mitteilungen diskutiert worden sind und die eigentlich die Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie betreffen.

Da ist die von EINSTEIN betonte Tatsache, daß die *Existenz von Maßstäben und Uhren* nicht aus den Feldgleichungen der Relativitätstheorie allein folgt, worauf auch verschiedentlich von Herrn INFELD hingewiesen worden ist. Wenn EINSTEIN sagt, daß die Existenz von Maßstäben und Uhren nicht aus der Relativitätstheorie folgt, so bezieht sich das darauf, daß die Existenz von Materie nicht aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgt, sondern als besondere Annahme hinzugenommen wird. Das hat EINSTEIN sehr beschäftigt, er hat das immer wieder gesagt, deswegen wiederhole ich es. Wenn man aber die Existenz der Materie zugibt, dann halte ich es für unwesentlich, ob das in Form von Punktsingularitäten oder in der Form von ausgedehnter Materie geschieht. In beiden Fällen kann man ja, wie Sie gehört haben, die Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen ableiten, vermöge der vier Identitäten, die aus der Gruppe der allgemeinen Relativitätstheorie folgen. Ich glaube, wenn man einmal die Existenz der Materie in der mathematischen Darstellung der Theorie ausgedrückt hat, ist es nicht sehr schwierig, *Modelle für Uhren* zu konstruieren. Alle stimmen darin überein, daß natürlich nicht jedes System als Uhr bezeichnet werden kann, sondern nur solche, welche die Eigenzeit ds^2 messen; aber ich glaube, wenn jemand sich nun die Aufgabe stellt, ein Modell für eine solche Uhr zu konstruieren, so kann er das schon, wenn ihm die Existenz der Materie zugestanden wird; wenn man nicht so

ehrgeizig ist, die Atomuhren modellmäßig behandeln zu wollen, so kann man überdies auch klassische Modelle für Uhren machen. Wenn man einen Körper hat, sagen wir einen Planeten, der von einem Mond umkreist wird, dann wird unter bestimmten zu präzisierenden Voraussetzungen mit vielen Kautelen, ein solches System mit einer gewissen Annäherung als Uhr zu betrachten sein. Wenn wir dieses System „adiabatisch", d. h. nicht zu plötzlich in ein starkes äußeres Gravitationsfeld bringen, dann muß schon die Periode in der gewöhnlichen Zeit sich entsprechend der Rotverschiebung verhalten; wenn man das mathematisch diskutieren will, muß man natürlich die Vorsichtsmaßregel anbringen, daß die Inhomogeneität des Gravitationsfeldes für Mond und Zentralkörper nicht zu groß wird, sonst bleibt die Periode nicht konstant. Entsprechendes gilt für die zeitliche Inhomogeneität des äußeren Gravitationsfeldes: im Laufe einer Umlaufsperiode muß die Änderung des äußeren Gravitationsfeldes relativ klein bleiben. Aber, wenn man die nötigen Kautelen anbringt und die Voraussetzungen mathematisch präzisiert, so könnte man es m. E. durchaus rechtfertigen, ein solches System als Uhr zu betrachten.

Wenn man andrerseits, entsprechend der Mode unserer Zeit, eine Atomuhr modellmäßig behandeln will, dann ist es natürlich kein Bewegungsproblem, sondern ein Problem der Wellenmechanik, und man müßte das dementsprechend nicht mehr klassisch machen, sondern wellenmechanisch. Ich vermute, daß die Kautelen in der Wellenmechanik ganz ähnlich sein werden wie in der klassischen Mechanik. Zum Beispiel gibt in der Wellenmechanik die Inhomogeneität des Gravitationsfeldes zu einem Effekt Anlaß, der dem Stark-Effekt ähnlich ist und Entsprechendes gilt auch bei der zeitlichen Veränderung des äußeren Feldes. Ich vermute, daß beide Diskussionen, die klassische und die wellenmechanische, eine gewisse Ähnlichkeit haben werden. Doch wollte ich besonders betonen, daß hier die Größe des Wirkungsquantums nicht prinzipiell und direkt eingeht, so, daß es auch klassische Modelle für Uhren gibt. So viel ich weiß, ist das auch die Meinung von Herrn Møller.

Von dem Uhrenmodell ist das tiefer liegende Problem zu unterscheiden: wie die Materie überhaupt in die Theorie eingebaut wird.

Zu den mathematischen Fragen gehört auch die, wie weit die *Auszeichnung spezieller Bezugssysteme* nützlich ist. Ich finde die Theoreme von Prof. Fock sehr interessant, daß man unter gewissen Bedingungen die bekannte spezielle Differentialbedingung benützen kann, um Koordinatensysteme auszuzeichnen, wobei es übrigens offen bleibt, ob das nicht nur im Kleinen, sondern auch im Großen möglich ist. Ich bezweifle allerdings, ob es denn praktisch und prinzipiell vernünftig ist zu sagen, die Auszeichnung dieses besonderen Bezugssystems habe eine prinzipielle oder philosophische Bedeutung. Wir haben ja Analoges auch bei der Eich-

gruppe erlebt in der klassischen und in der Quantenelektrodynamik; da ist manchmal diese und manchmal jene Spezialisierung der Eichung zweckmäßig. Daß bei dieser Frage eine tiefe Analogie zur Situation in der speziellen Relativitätstheorie vorhanden ist, das kann ich nicht recht sehen.

Nun kommen wir zu den *Erweiterungen der Theorie.* Da ist die Erweiterung mit den fünfdimensionalen Methoden und die Erweiterung mit den nichtsymmetrischen Größen. Herr Prof. FOCK hat mir gesagt, er glaube nicht, daß diese Erweiterungen irgendeinen physikalischen Sinn haben, und auch ich habe sehr starke Zweifel an der physikalischen Richtigkeit dieser Erweiterungen, wenn man nicht gleichzeitig in einer tieferen Weise die Quantentheorie hineinbringt. Es könnten also wohl diejenigen, welche diese Erweiterungen physikalisch nicht ganz ernst nehmen, eine große Chance haben, recht zu behalten. Nun hat uns leider Herr JORDAN mit dem Zauber seiner mathematischen Sätze verhindert, etwas darüber zu hören, was eigentlich seine physikalischen Gründe sind, um eine Veränderung der Gravitationskonstante anzunehmen; das hätte uns ja sicher alle sehr interessiert; und da wäre er auch sicher gewesen, keine Konkurrenz von Seiten unseres ausgezeichneten Referenten LICHNEROWICZ zu haben. Nun, er hat ja darüber wohl einiges geschrieben, aber es scheinen mir, nach dem was wir von ROBERTSON gehört haben, in den empirischen Resultaten über die Expansion des Universums nicht mehr viele Gründe für eine Veränderlichkeit der Gravitationskonstante übrig geblieben zu sein. Ich will nicht behaupten, daß es unmöglich ist, eine Veränderung der Gravitationskonstante anzunehmen; man kann vielleicht gewisse Phänomene auf der Erde dann etwas leichter deuten, aber es ist eben so, daß ich nicht so ganz sehe, daß diese Theorie genügende Fundierung hat. Ich habe wie andere meine starken Zweifel, ob man hier physikalisch auf einer richtigen Spur ist.

Wir haben dann gesehen, wie EINSTEIN und Frau KAUFMAN einen heroischen Kampf gekämpft haben gegen den Fluch, der aus der Vereinigung des „von Gott Getrennten" entsprungen ist, und wie dieser Kampf mit der besonderen Waffe einer λ-Transformation geführt worden ist. Das ist sicher in formaler Hinsicht alles vollkommen richtig; aber ich habe weder einen physikalischen noch einen geometrischen Sinn dieser λ-Transformation sehen können. Herr WEYL hat auch darauf hingewiesen, daß der Buchstabe λ in der allgemeinen Relativitätstheorie bereits durch ein unglückliches Schicksal präjudiziert ist, das sich leicht wiederholen könnte.

Es liegt aber auch hier eine tiefere kontroverse Frage zugrunde, nämlich die, ob man den *klassischen Feldbegriff* als befriedigend oder als unbefriedigend empfindet. Ich habe sehr viel mit EINSTEIN darüber gespro-

chen, und ich bin mehr geneigt, ähnlich wie Herr Born es gesagt hat, diesen Feldbegriff nicht nur heuristisch, sondern auch in einer tieferen Weise als unbefriedigend zu betrachten. Es ist hierbei einiges zu Tage getreten, das mich schon in meiner Jugend gestört hat, als ich den Enzyklopädie-Artikel über Relativitätstheorie schrieb und das seitdem, wie Herr Born schon gesagt hat, eigentlich nicht eine genügende Aufklärung gefunden hat. Ich glaube, die Weise, wie man Felder mißt, muß als eine prinzipielle Frage berücksichtigt werden; es handelt sich nicht um die technischen Einzelheiten; es handelt sich auch gar nicht darum, daß jede Größe, die mathematisch in einer Theorie vorkommt, nun auch direkt meßbar sein sollte. Es handelt sich mehr darum, daß man, wenn man an die Messung des Feldes geht, einen Probekörper braucht, und es verursacht mir großes Unbehagen, wenn im gleichen Atemzug der Probekörper wiederum als Feld betrachtet wird. Es handelt sich hier also nicht um eine empirische Meßphilosophie, sondern mehr darum, daß man nicht das, womit man das Feld mißt und das gemessene Feld zugleich beschreiben kann; daß die Betrachtungsweisen eines Körpers einerseits als ein ausgemessenes Feld, anderseits als ein Mittel zur Ausmessung eines anderen Feldes, einander im Sinne eines komplementären Entweder-Oder ausschließen müssen. Bohr hat an einem Solvay-Kongress schon ähnliche Ideen vorgebracht. Daß es zum Beispiel logisch möglich ist, die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum hinzuschreiben ohne eine Ladung einzuführen, das stört mich; denn wenn es keine Ladung gäbe, so würde man ja dieses Feld nicht messen können. Dennoch kann man das Feld ohne Ladung mathematisch hinschreiben und es scheint mir, daß in diesem Sinne der klassische Feldbegriff immer irgendwie reine Mathematik bleiben muß. Hierzu hatte ich stets eine andere Einstellung als Einstein. Deshalb war ich sehr befriedigt, als die Quantenmechanik entstand; denn ich hoffte noch immer, daß dieses Gegensatzpaar Probekörper und Feld sich vielleicht doch einmal analog fassen lassen wird, wie das andere Gegensatzpaar Impuls und Ort. Aus diesem Grund hatte ich, ähnlich wie Herr Born, von vorneherein nicht die Idee, daß es wirklich gehen könne mit dem klassischen Feldbegriff als alleiniger Grundlage der Physik. Leider kann ich es nicht deutlicher sagen, sonst hätte ich eine richtige Theorie. Aber wenn ich es Ihnen nun gefühlsmäßig noch näher bringen will, so möchte ich Goethe mißbrauchend sagen: da muß etwas sein, „was sich dem Feld entgegenstellt, der Körper, diese plumpe Welt.“

Das führt nun hier an die Grenze unseres Wissens, an die Fragen der Quantisierung des Feldes; es scheint, daß eine gewisse Übereinstimmung darüber bestand, daß eine bloße Anwendung konventioneller Quantisierungsmethoden wahrscheinlich nicht zum Ziele führen wird, und ich bin persönlich sehr beeindruckt davon, daß Herr Bergmann, der diese kon-

ventionellen Methoden so glänzend beherrscht, bis jetzt nicht zum Ziele gekommen ist. Ich habe früher die Schwierigkeiten der Nichtlinearität gar nicht sehr ernst genommen und ich möchte daran erinnern, daß in der alten Arbeit über Feldquantisierung von HEISENBERG und mir die Linearität der Lagrange-Funktion nicht vorausgesetzt wurde. Ich bin nicht so sicher, daß in der Quantisierung des Gravitationsfeldes die mathematischen Schwierigkeiten bloß wegen der Nichtlinearität so groß sind. Denn man muß bedenken, daß in der lorentz-invarianten gewöhnlichen Quantenelektrodynamik die Wechselwirkung zwischen Materie-Feld und elektromagnetischem Feld ebenfalls nicht linear ist; eine lineare Theorie ist eigentlich reine Mathematik: da ist keine Wechselwirkung und man kann nichts messen. Es scheint mir also, daß nicht so sehr die Linearität oder Nichtlinearität Kern der Sache ist, sondern eben der Umstand, daß hier eine allgemeinere Gruppe als die Lorentzgruppe vorhanden ist. Ich habe ja schon darüber gesprochen und möchte mich sehr kurz fassen; wir haben die ausgezeichneten Referate von BERGMANN und von KLEIN gehört, und ich hoffe, daß die Fortführung solcher Untersuchungen, die erst in den Anfängen liegen, von denen uns insbesondere Herr KLEIN berichtet hat, uns vielleicht doch auf irgendeinen grünen Zweig führen werden; denn bei der Quantisierung des Gravitationsfeldes entsteht durch die Unbestimmtheit des Lichtkegels eine neue Sachlage. Einerseits ist dies eine Schwierigkeit für die Anwendung konventioneller Methoden, anderseits aber hoffe ich, daß sie zur Überwindung der Divergenzschwierigkeiten der Feldquantisierung vielleicht doch beitragen könnte.

Ich glaube, das ist alles, was ich in der kurzen Zeit improvisieren konnte. Ich bitte um Nachsicht, daß ich, von dem was Sie gehört haben, vieles nicht genannt habe, was sicher sehr gut und schön gewesen ist und möchte daher zum Schluß noch besonders darauf hinweisen, daß dieses Schlußwort keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann.

Jubiläumsfeier

Fête du Jubilé

Meeting of the Jubilee

Albert Einstein en Suisse
Souvenirs

par L. Kollros (Zürich)

Le Professeur A. Mercier a introduit ce discours comme suit:

Mesdames, Messieurs,

Empêché de se joindre à nous par un état de santé précaire, le Professeur Louis Kollros m'a chargé de parler en son nom. Tout en déplorant sincèrement l'absence de celui qui a été l'ami et le camarade d'études d'Albert Einstein, je m'acquitterai de cette tâche aussi bien que possible.

Voici ce que Monsieur Kollros voulait vous dire lui-même:

Cette cérémonie commémorative devait être une manifestation de joie et de reconnaissance; elle devint un jour de deuil quand nous arriva le 18 avril la triste nouvelle du décès de celui que nous voulions fêter. Mais si la joie a fait place aux regrets, la reconnaissance subsiste.

Quand le Comité d'organisation de ce Jubilé m'a demandé de rappeler quelques vieux souvenirs, j'ai pensé que nous aurions infiniment plus de plaisir à entendre Einstein lui-même nous parler de ses premiers travaux. Je lui ai écrit pour l'engager vivement à venir en Suisse. Il m'a répondu avec un peu d'amertume: «Wir sind beide keine Jünglinge mehr! Was mich betrifft, so kann ich nicht an eine Beteiligung denken.»

Je ne pensais pas alors qu'il était à la veille de sa mort. C'est avec une douloureuse consternation que nous avons appris son départ inattendu. La presse mondiale a annoncé son décès en retraçant sa vie et son oeuvre. J'hésite un peu à y revenir aujourd'hui. Mais, selon le désir du Comité, je vais essayer de vous dire quelque chose de nos années d'études, de nos anciens maîtres et de ceux qui ont pu avoir une influence sur les premiers travaux de l'illustre disparu.

Il y a 60 ans, Einstein arrivait à Zurich pour étudier à l'EPF; il n'avait que $16^1/_2$ ans; en général, on n'entrait pas au Polytechnicum avant 18 ans. Mais il voulait tenter sa chance. Au Gymnase de Munich, les méthodes de dressage autoritaire ne lui plaisaient pas. Son maître de latin lui avait même dit qu'il ne ferait rien de bon dans la vie. Il quitta alors Munich pour rejoindre ses parents à Milan et se préparer seul à l'examen d'admis-

sion de Zurich. Excellent en mathématiques et physique, ses connaissances dans d'autres branches: botanique, zoologie, français, . . . sont jugées insuffisantes et il échoue.

Dix ans plus tard, en cette année 1905 que nous commémorons aujourd'hui, il publie 5 travaux importants, parmi lesquels sa thèse de doctorat «Sur une nouvelle détermination de la dimension des molécules» présentée à l'Université de Zurich, – ses fameuses recherches sur le mouvement brownien, – son hypothèse hardie sur les quanta de lumière avec son explication de l'effet photoélectrique qui lui valut plus tard le prix Nobel, – enfin son premier mémoire sur le problème espace-temps: «Elektrodynamik bewegter Körper», sa célèbre «Relativité restreinte» qui allait révolutionner la Physique théorique.

Que s'est-il passé dans cet intervalle de dix ans?

Je n'ai pas la prétention d'expliquer l'éclosion de ses idées géniales; j'essaierai seulement de caractériser l'ambiance de ce grand penseur pendant les quelques années qu'il a passées en Suisse.

Son premier revers fut vite oublié. Le directeur de l'EP, le professeur de mécanique Herzog lui conseilla de combler ses lacunes dans un bon Gymnase suisse. A l'Ecole cantonale d'Aarau, il trouva une atmosphère bien différente de celle de Munich.

Après une année dont il a gardé le meilleur souvenir, il avait le certificat de maturité qui lui permettait d'entrer sans examen à l'EPF. C'était en octobre 1896. Il était plus jeune que tous ses camarades. Renonçant à son premier projet de faire des études d'ingénieur, il s'est inscrit à la section de mathématiques et physique.

Pendant les 3 premiers semestres, les cours se faisaient déjà, – comme aujourd'hui, – en allemand et en français. Einstein suivait les cours de Hurwitz et de Fiedler avec ses amis Ehrat et Grossmann, tandis que nous profitions, avec nos camarades ingénieurs de langue française, des cours correspondants de Franel et de Lacombe. Plus tard, j'ai eu le grand plaisir de compter Jérôme Franel, le recteur du cinquantenaire de l'EP, parmi mes plus chers amis.

C'est au cours de géométrie analytique de Geiser que j'ai fait la connaissance de mes camarades de langue allemande parmi lesquels j'ai remarqué surtout: Marcel Grossmann, esprit vif et enjoué et Albert Einstein, plus méditatif, sympathique par son humour et son indépendance.

La fin de notre première année d'études a été marquée par un événement scientifique important: *le premier Congrès international des mathématiciens* présidé par Geiser.

Le bernois Karl Friedrich Geiser, né à Langenthal le 26 février 1843, a joué un rôle important à l'EP: il a commencé ses études en 1859 déjà,

à la section de mécanique. De 1861 à 63, il a suivi à l'Université de Berlin les cours de son grand oncle JAKOB STEINER, le petit paysan d'Utzenstorf qui est devenu l'un des plus grands géomètres de son temps. Privat-docent à 20 ans, professeur à 26 ans, GEISER a été directeur de l'EP. à deux reprises, de 1881 à 87 et de 1891 à 95.

Son successeur à l'EP depuis 1913 à 31, HERMANN WEYL (que nous sommes heureux de saluer parmi nous), a écrit le beau livre «Raum, Zeit, Materie» qui a fait sensation; cet ouvrage se greffe sur la théorie d'EINSTEIN et cherche à réunir le champ de gravitation et le champ électromagnétique dans un ensemble plus vaste.

Pour le Congrès de Zurich, HENRI POINCARÉ (1854–1912) avait annoncé une conférence «Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique»; mais retenu à Paris par un deuil, il envoya son manuscrit qui fut lu par FRANEL. Je ne crois pas qu'EINSTEIN ait entendu cette conférence, mais elle a été reproduite dans le volume de la Bibliothèque de philosophie scientifique intitulé: «La valeur de la science»; il faisait suite à «La science et l'hypothèse» (qu' EINSTEIN lisait à Berne) où POINCARÉ disait déjà: «L'espace absolu, le temps absolu, la géométrie euclidienne même ne sont pas des conditions qui s'imposent à la mécanique; on pourrait énoncer les faits en les rapportant à un espace non-euclidien». Par son analyse subtile des notions de temps et d'espace, de la simultanéité de deux événements, de l'égalité de deux durées, POINCARÉ doit être considéré comme un précurseur de la physique moderne. «L'analyse pure et la physique se pénètrent mutuellement» dit-il. «Chacune de ces deux sciences doit se réjouir de tout ce qui élève son associée».

A l'EP, ces deux branches étaient inégalement représentées à la fin du siècle passé: trop peu de physique théorique et presque trop de mathématiques. Nous avions en effet, à côté des géomètres GEISER et FIEDLER, deux grands mathématiciens qui dirigeaient les travaux du séminaire: ADOLF HURWITZ (1859–1919) dont les cours étaient des chefs-d'oeuvre de précision et de clarté et HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) plus difficile à suivre. Ils avaient travaillé ensemble à Königsberg, où ils formaient de 1884 à 92, avec DAVID HILBERT (1862–1943) un trio de jeunes savants explorant tous les domaines des mathématiques. Le plus jeune d'entre eux, MINKOWSKI, avait eu à 18 ans le grand prix des sciences mathématiques de Paris. CHARLES HERMITE (1822–1901), l'illustre doyen des mathématiciens français de cette époque, disait de la Géométrie des nombres créée par MINKOWSKI: «Je crois voir la terre promise!» Il lui écrivait: «au premier coup d'oeil, j'ai reconnu que vous avez été bien au delà de mes recherches en nous ouvrant des voies toutes nouvelles. Je me sens rempli d'étonnement et de plaisir devant vos principes et vos résultats. Vous voulez bien rapporter à mes anciennes recherches le point de départ

de vos beaux travaux, mais vous les avez tant dépassées qu'elles ne gardent plus d'autres mérites que d'avoir ouvert la voie dans laquelle vous êtes entré». Il s'agissait de la partie la plus abstraite des mathématiques: la théorie des nombres.

En Géométrie, Minkowski a créé la notion de *volume mélangé* de 3 corps convexes; elle contient comme cas particuliers les notions ordinaires de volume, de surface et d'intégrale de la courbure moyenne d'un corps. Ses inégalités liant ces 3 dernières grandeurs sont aujourd'hui classiques.

Déjà comme privat-docent à l'Université de Bonn en 1886, Minkowski avait montré son intérêt pour la physique; un de ses travaux sur l'Hydrodynamique a été présenté par Helmholtz (1821–94) à l'Académie des sciences de Berlin. Attiré à Bonn par Heinrich Hertz (1857–94), Minkowski a dit un jour qu'il serait peut-être devenu physicien si Hertz avait vécu plus longtemps.

A l'EPF le professeur Herzog désirait compléter son cours de mécanique technique par un cours supérieur de mécanique analytique qui s'adresserait aussi aux ingénieurs. Il a demandé à Minkowski de faire ce cours; nous l'avons suivi avec intérêt; mais les étudiants ingénieurs l'ont en général trouvé trop difficile.

Pendant notre dernier semestre d'études, Minkowski nous a fait un beau cours sur des applications de la mécanique analytique; Felix Klein lui avait demandé d'écrire un article sur la capillarité pour l'Encyclopédie des Sciences mathématiques; il nous en a donné la primeur. A la fin de ce cours, Einstein m'a dit avec enthousiasme et un brin de mélancolie: «Das ist die erste Vorlesung über mathematische Physik, die wir am Poly hören!» C'est qu'il n'était pas satisfait des *autres* cours de Physique.

Tandis que Grossmann préparait une thèse en géométrie non euclidienne avec Fiedler, et que j'étudiais les beaux travaux de Minkowski, Einstein s'intéressait avant tout à la Physique théorique; il n'a pas eu plus de plaisir que nous aux exercices obligatoires de physique pratique du professeur Pernet; il s'est même offert le luxe de ne plus venir à ces exercices; ce qui lui a valu une vive réprimande et un avertissement sérieux du Directeur.

Le professeur principal de physique, Heinrich Friedrich Weber (1843–1912) était un pionnier de l'électrotechnique en Suisse et en Allemagne où on lui a confié de nombreuses expertises; ses cours de physique classique étaient vivants; mais nous attendions en vain un exposé de la théorie de Maxwell. Nous savions qu'elle établissait l'identité de transmission de l'électricité et de la lumière, – que les expériences de Hertz sur les ondes électriques avaint confirmé la théorie; mais nous aurions aimé en savoir davantage. Einstein surtout était déçu. Pour compenser cette lacune, il s'est mis à étudier seul les travaux de Helmholtz, Max-

WELL, HERTZ, BOLTZMANN, LORENTZ. Il négligeait parfois les cours, sachant qu'il pourrait, à la veille des examens, consulter les notes prises consciencieusement par son ami GROSSMANN. Quelques professeurs le croyaient paresseux; ils ont dû reconnaître plus tard qu'ils s'étaient bien trompés.

En juillet 1900, quelques mois avant la naissance de la théorie des quanta, nous terminions nos études à l'EP par les examens de diplôme: EHRAT, GROSSMANN et moi en mathématiques, EINSTEIN en physique.

Deux de nos camarades avaient renvoyé ces examens à l'année suivante: GUSTAVE DUPASQUIER qui a été plus tard professeur à l'Université de Neuchâtel, et Mademoiselle MILEVA MARIC (1875–1948) qui est devenue en janvier 1903 la première épouse d'EINSTEIN.

Les étudiants diplômés ont la possibilité de continuer leurs études à l'EP en acceptant une place d'assistant; nous avons été engagés: GROSSMANN chez FIEDLER, EHRAT chez RUDIO et moi chez HURWITZ; mais j'ai préféré – peut-être à tort – un poste de professeur au Gymnase qu'on venait de créer à La Chaux-de-Fonds, ma ville natale. Le professeur WEBER avait choisi comme assistants deux ingénieurs mécaniciens; il n'avait pas pensé à EINSTEIN qu'il trouvait sans doute trop indépendant. Ainsi le plus méritant d'entre nous n'avait pas de place. Il a d'abord fait quelques calculs pour le directeur de l'Observatoire de Zurich; puis il a remplacé pendant 6 mois au Technicum de Winterthour un professeur astreint au service militaire.

En février 1901, il est devenu citoyen suisse; il est resté bourgeois de Zurich jusqu'à sa mort. En 1901 aussi, il publiait son premier travail: «Folgerungen aus den Kapillaritätserscheinungen» qui se rattache au cours de MINKOWSKI. En 1902, un poste de régent dans un pensionnat de Schaffhouse ne lui a pas procuré beaucoup de satisfaction et il est retourné chez ses parents à Milan où il a eu le grand chagrin de perdre son père.

Malgré ses soucis, il continue à penser aux grands problèmes de la physique; il écrit à GROSSMANN: «In wissenschaftlicher Beziehung sind mir ein paar herrliche Ideen in den Kopf gekommen, die nur noch gehörig ausgebrütet werden müssen». Il suffisait d'une atmosphère favorable et d'un peu de chance pour faire éclore ses idées.

Or le père de GROSSMANN connaissait le Directeur HALLER du Bureau fédéral de la propriété intellectuelle à Berne; il lui a vivement recommandé le jeune physicien de Zurich. Quand le directeur a demandé à EINSTEIN s'il s'était déjà occupé de questions techniques et de brevets, il lui a répondu franchement: «Je n'en ai aucune idée!» Mais le directeur a vite remarqué qu'il avait à faire à un jeune homme intelligent et il l'a engagé *en juin 1902*. EINSTEIN avait enfin une place convenable qui lui

permettrait de réaliser ses projets. Il s'est marié; son premier fils, né en mai 1904, est aujourd'hui professeur d'hydraulique en Californie.

Einstein a trouvé à Berne quelques bons amis avec lesquels il a eu bien des soirées de lectures et de discussions; il a étudié les travaux de physique théorique les plus récents, entre autres la théorie des électrons de Lorentz (1853–1928) qui fut l'intermédiaire entre Maxwell et la physique moderne. Avec sa théorie des électrons, Lorentz arrivait à expliquer presque tous les phénomènes connus. Seule la fameuse expérience de Michelson ne pouvait s'expliquer qu'à l'aide d'une hypothèse complémentaire: la contraction de tous les corps animés d'un mouvement de translation uniforme. *Cette contraction n'était pas due à un frottement*; elle devait être la même quelle que soit la nature des corps et les forces auxquelles ils sont soumis. Einstein s'est demandé en 1905 si l'on ne pouvait pas faire une hypothèse plus simple et plus naturelle; il est arrivé ainsi à sa nouvelle conception de l'espace et du temps; elle se base sur les deux postulats suivants:

1. La lumière a une vitesse constante, la même dans toutes les directions.
2. Toute loi physique valable par rapport à un système de coordonnées S doit aussi être valable par rapport à un système S' qui est en translation uniforme relativement à S.

La fameuse transformation de Lorentz se déduit facilement des deux postulats d'Einstein. Il en résulte que

le même objet paraît plus court s'il est en mouvement rapide que s'il est au repos et que la montre va plus lentement, mais la différence est insignifiante si la vitesse du mouvement est petite par rapport à celle de la lumière.

Selon un autre travail d'Einstein, la masse d'un corps n'est pas constante; elle dépend de sa vitesse.

De plus, à tout apport d'énergie E correspond une augmentation de la masse de E/c^2 où c est la vitesse de la lumière. C'est une très petite quantité, sauf si E est grand, comme dans les réactions nucléaires par exemple.

Ainsi, les 2 principes de la physique classique: – Conservation de la masse et conservation de l'énergie – sont réunis en un seul par la théorie d'Einstein. Energie et masse sont 2 aspects d'une même chose, 2 noms pour la même grandeur. Ce résultat a une très grande importance théorique et pratique.

Les travaux qu'Einstein a publiés en 1905 avaient attiré l'attention de tous les physiciens; ils trouvaient que leur auteur serait mieux à sa place dans une Université qu'au Bureau des brevets.

Au Congrès international de Rome, en avril 1908, nous nous promenions dans les jardins de la villa d'Este à Tivoli avec Lorentz et Minkowski. Tous deux reconnaissaient la grande valeur des idées neuves introduites

par le jeune savant de 26 ans. LORENTZ renonçait à son hypothèse de la contraction des corps en mouvement pour se rallier à la nouvelle explication rationnelle et cohérente du résultat négatif de l'expérience de MICHELSON.

Dans son travail «Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern» publié dans les Göttinger Nachrichten de 1907, MINKOWSKI se rattache aux idées d'EINSTEIN. Il disait dans sa mémorable conférence de Cologne le 21 septembre 1908: «Von nun an sollen Raum für sich und Zeit für sich zu Schatten herabsinken; nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren». Il interprète graphiquement la forme quadratique liant l'espace et le temps et il montre que les transformations de Lorentz forment ce que les mathématiciens appellent un *groupe*, c'est-à-dire que 2 transformations successives peuvent être remplacées par une seule de même forme. Si la vitesse du mouvement est petite par rapport à celle de la lumière, on retrouve comme cas particulier le groupe des transformations de la mécanique classique de NEWTON qui reste donc vraie en première approximation, avec ses nombreuses vérifications astronomiques.

La belle conférence de MINKOWSKI à Cologne fut malheureusement son «chant du cygne». Il est mort le 12 janvier 1909, dans sa 45ème année, à la suite d'une appendicite opérée trop tard. Ce fut une perte cruelle pour la science.

EINSTEIN a dit: «Ohne den wichtigen Gedanken MINKOWSKIS wäre vielleicht die allgemeine Relativitätstheorie in den Windeln stecken geblieben.»

C'est pendant ce semestre d'hiver 1908/09 qu'EINSTEIN a fait son premier cours de privat-docent à l'Université de Berne, sur la théorie du rayonnement. L'année suivante, il était professeur extraordinaire à l'Université de Zurich. Son ami GROSSMANN avait succédé à FIEDLER en octobre 1907 à l'EP, tandis que je faisais les cours de géométrie en français depuis le printemps 1909.

En décembre 1909, nous avons eu le plaisir d'entendre la leçon inaugurale d'EINSTEIN: «Sur le rôle de la théorie atomique dans la physique moderne».

Quand il a parlé pour la première fois de sa relativité restreinte à Zurich, ce n'était pas à l'Université, ni à l'EP, mais dans un restaurant de la ville, dans une salle de la Corporation des Charpentiers (Zimmerleuten). Il n'avait à sa disposition qu'un petit tableau noir où il a tracé une horizontale: c'était son espace à une dimension qu'il allait mettre en rapport avec sa nouvelle notion de temps. «Denken Sie sich in jedem Punkt dieser Geraden eine Uhr, also unendlich viele Uhren», disait-il au début de sa conférence. Après avoir exposé sa théorie pendant plus d'une heure, il

s'est arrêté brusquement, s'excusant d'avoir parlé trop longtemps et il nous a demandé: «Wie spät ist es eigentlich? Ich habe nämlich keine Uhr».

En 1910, il est appelé à l'Université allemande de Prague, créée en 1888. Son premier recteur avait été le philosophe Ernst Mach, dont Einstein lisait déjà les travaux à Zurich et plus tard à Berne. De Prague, il publie le mémoire «Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes», où il parle pour la première fois de la déviation des rayons lumineux par un champ de gravitation. Il a aussi repris et développé son hypothèse de Berne sur les quanta de lumière, dans le travail intitulé: «Über die thermodynamische Begründung des photochemischen Äquivalenzgesetzes».

En 1911, il discute à Bruxelles, au Congrès Solvay, avec Rutherford, Planck, Nernst, Poincaré, Langevin et Madame Curie.

Mais il devait bientôt revenir en Suisse.

Quelques mois après son arrivée à Prague, Grossmann lui demandait déjà si une chaire à l'EPF l'intéresserait. Dans sa réponse affirmative de novembre 1911, il dit qu'il se réjouit beaucoup de revenir à Zurich et que cette perspective l'engage à refuser un appel à l'Université d'Utrecht. L'alsacien Pierre Weiss, qui avait succédé à Weber à l'EP, a suggéré au Président du Conseil, Robert Gnehm, l'idée de demander à Poincaré et à Madame Curie leur avis sur Einstein. Tous deux trouvaient que l'institution scientifique qui saurait s'attacher ce jeune maître en retirerait beaucoup d'honneur et rendrait un grand service à la Science.

En octobre 1912, Einstein commençait son activité à l'EP; personne ne se doutait alors qu'elle ne devait durer que trois semestres. A côté de la direction du séminaire, il a fait des cours de mécanique analytique, de thermodynamique, théorie moléculaire de la chaleur, électricité et magnétisme.

Mais ce qui l'absorbait surtout, c'était l'idée de généraliser sa théorie de 1905. Il cherche une physique qui ne soit pas seulement valable pour des systèmes de référence privilégiés (au repos ou en translation uniforme); il se demande pourquoi ces systèmes de référence ne pourraient pas être uniformément variés, par exemple, ou en rotation. Les équations de la nouvelle théorie devraient être indépendantes du mouvement du système de référence.

A Prague déjà, il avait prévu que cette relativité généralisée exigerait beaucoup plus de mathématiques que l'élégante relativité restreinte; il disait maintenant que l'élégance devait plutôt rester l'affaire des tailleurs et des cordonniers.

Faisant part de ses préoccupations à Grossmann, il lui dit un jour: «Grossmann, Du mußt mir helfen, sonst werd' ich verrückt!» Et Marcel

Grossmann sut lui montrer que l'instrument mathématique dont il avait besoin avait été créé à Zurich même en 1869 par Christoffel (1829–1900) dans le travail: «Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades» publié dans le tome 70 du Journal de Crelle.

Elwin Bruno Christoffel a été professeur à l'EPF de 1862 à 69, puis à la «Gewerbeakademie de Berlin» pendant 3 ans et enfin à l'Université de Strasbourg, où il est resté jusqu'à sa mort en 1900.

Basés sur les résultats de Christoffel, les italiens Ricci et Levi-Civitá ont développé dans les «Mathematische Annalen de 1901» (tome 54) leurs «Méthodes de Calcul différentiel absolu» qui permettent de donner une forme invariante aux équations de la physique mathématique. Les idées de Christoffel avaient leur origine dans la thèse d'habilitation de Riemann (1826–66): «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen», qui est de 1854. Le tenseur de Riemann-Christoffel joue un rôle important dans la théorie de la relativité généralisée.

Ainsi, la recherche désintéressée de la vérité mathématique procure souvent un instrument indispensable au progrès de la physique ou de la technique. Il y a là une belle harmonie entre la raison humaine et la réalité.

Le fruit de la collaboration Einstein-Grossmann est le mémoire qu'ils ont publié ensemble en 1913 dans la «Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft» à Zurich. Grossmann a fait un exposé systématique de l'analyse vectorielle à n dimensions; il a défini les tenseurs covariants et contrevariants de rang quelconque r et les opérations différentielles sur ces tenseurs. (Les transformations dites covariantes ou contrevariantes interviennent depuis environ cent ans en géométrie algébrique.) Si $n = 4$ et $r = 2$, on a le tenseur fondamental du champ de gravitation utilisé par Einstein. En 1916, à Berlin, Einstein a publié une nouvelle édition de sa relativité généralisée de 1913.

Il a simplifié l'écriture des formules; il m'a dit un jour en badinant: «J'ai fait une grande découverte en mathématiques; j'ai supprimé le signe somme toutes les fois que la sommation doit être faite sur un indice qui intervient deux fois dans le terme général». Cette simplification typographique s'est révélée très utile.

Dans un champ de gravitation, la géométrie euclidienne doit être remplacée par la géométrie de Riemann où la somme des angles d'un triangle est plus grande que 180°, comme pour le triangle sphérique.

La physique est ainsi ramenée à une géométrie non euclidienne à 4 dimensions; ses propriétés dépendent des dix coefficients d'une forme quadratique.

Le champ de gravitation est caractérisé par ces dix coefficients qui sont des fonctions des 4 coordonnées (t, x, y, z).

Si le champ de gravitation est faible, on retrouve la relativité restreinte en première approximation, de même qu'une surface peut être remplacée aux environs d'un de ses points par le plan tangent en ce point.

La théorie de la relativité généralisée explique seule quelques phénomènes qui échappent à la mécanique classique:

1. la déviation de la lumière par un champ de gravitation,
2. le mouvement de 43 secondes d'arc par siècle du périhélie de Mercure,
3. le déplacement vers le rouge des lignes spectrales de la lumière venant des étoiles.

En automne 1913, les naturalistes et médecins allemands avaient leur séance annuelle à Vienne. EINSTEIN a été invité à leur exposer ses nouvelles idées sur la gravitation. GROSSMANN et moi, nous étions aussi à Vienne pour prendre contact avec nos collègues autrichiens. Le nom d'EINSTEIN avait attiré une foule énorme d'auditeurs. Chacun était étonné de la simplicité avec laquelle il présentait sa théorie que plusieurs avaient crue incompréhensible.

MAX PLANCK et WALTER NERNST tenaient à avoir EINSTEIN à Berlin; ils sont venus à Zurich pour lui faire des propositions: il pourrait organiser les recherches de physique à l'Institut Kaiser Wilhelm créé par Guillaume II en 1911; il serait membre de l'Académie des Sciences; il pourrait enseigner à l'Université s'il le désirait; sinon, il aurait le loisir de consacrer tout son temps à ses recherches. Le démocrate ALBERT EINSTEIN aimait la Suisse; il a d'abord hésité à répondre affirmativement aux savants berlinois; mais quand il a reçu l'appel définitif, il s'est décidé à quitter Zurich et sa famille; le 30 novembre 1913, il envoyait sa lettre de démission au Président du Conseil de l'EP.

Il n'a pas terminé le semestre d'hiver 1913/14. A la fin de décembre, nous avons organisé un souper d'adieux à la «Kronenhalle» de Zurich. Nous regrettions tous son départ. Lui-même était ravi de pouvoir consacrer tout son temps à ses recherches, . . . ravi et un peu anxieux tout de même; il ne savait pas ce que l'avenir lui réservait. Quand je l'ai accompagné chez lui le soir, il m'a dit: «Die Herren Berliner spekulieren mit mir wie mit einem prämiierten Leghuhn. Ich weiß nicht, ob ich noch Eier legen kann!»

Je n'ai plus le temps de vous parler de la vie d'EINSTEIN à Berlin. Son successeur à Prague, PHILIPP FRANK, aujourd'hui aussi en Amérique, l'a fait dans une biographie détaillée traduite en plusieurs langues. Invité partout à exposer ses idées, EINSTEIN a voyagé à travers le monde.

Mais à l'avènement d'Hitler, il a eu sa cruelle période d'épreuves qui l'a obligé de quitter définitivement l'Allemagne. Il s'est alors rendu aux Etats-Unis, à l'Institut des Hautes études de Princeton auquel il est resté fidèle.

En 1921, il obtint le prix Nobel de physique; en 1930, l'EPF lui décerna le titre de Dr. h.c. Malgré les distinctions reçues de partout, il a gardé sa belle simplicité et sa bonhomie. Il faut lire à ce sujet son livre «Mein Weltbild» où il dit par exemple: «Jeder soll als Person respektiert und keiner vergöttert sein. Eine Ironie des Schicksals, daß die andern Menschen mir selbst viel zuviel Bewunderung und Verehrung entgegengebracht haben, ohne meine Schuld und ohne mein Verdienst.»

«Mein Weltbild», publié d'abord à Amsterdam en 1934, a été réédité il y a 2 ans avec des annotations de Carl Seelig, l'auteur de l'ouvrage bien documenté: «Albert Einstein und die Schweiz», dont la 2^{me} édition vient de paraitre (Europa Verlag, 1954).

Pensant à cette année 1905 que nous fêtons aujourd'hui, Einstein m'écrivait dans sa dernière lettre: «Es scheint phantastisch zu denken, daß ein halbes Jahrhundert dazwischen liegt. Jedenfalls war dieses weit ergiebiger im Bereich der politischen Torheiten als im Bereich der wissenschaftlichen Erkenntnis.» (Ce demi-siècle a été bien plus fertile dans le domaine des folies politiques que dans celui de la connaissance scientifique).

Espérons à la veille de la Conférence de Genève que le prochain demi-siècle ne verra plus la science asservie à la destruction de la civilisation, mais que les valeurs spirituelles: la vérité morale et la vérité scientifique, l'intelligence et la bonne volonté aideront au contraire à rapprocher les hommes et les peuples.

Einstein est parti sans avoir pu se rallier à l'interprétation probabiliste de la physique quantique. Il croyait qu'on pouvait tout expliquer par une théorie du champ continu. Je n'en suis pas sûr. Mais c'est aux physiciens à trancher le débat.

Quoiqu'il en soit, Einstein, un peu isolé à la fin de sa vie, s'est acquis la reconnaissance de tous par sa puissance créatrice, par son exemple de sincérité et d'indépendance, par son courage dans l'adversité. Son nom restera parmi les plus grands dans l'histoire de la physique théorique et de la cosmologie.

Relativitätstheorie und Wissenschaft

von W. PAULI (Zürich)

Wenn wir die Relativitätstheorie in einem allgemeineren Rahmen als der Physik einschließlich Astrophysik betrachten wollen, so handelt es sich wohl in erster Linie um ihre Beziehung zur Mathematik auf der einen Seite, zur Erkenntnistheorie oder Naturphilosophie auf der anderen Seite. Ja, man kann sagen, daß die Beziehung der Physik zu diesen beiden Gebieten, die der Naturwissenschaft seit dem 17. Jahrhundert ihre charakteristische Prägung gibt, durch die Relativitätstheorie erneut in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses gerückt wurde.

Die spezielle Relativitätstheorie knüpfte an den mathematischen Gruppenbegriff an, wie er bereits in der heute empirisch so wohlbegründeten GALILEI-NEWTONschen Mechanik zu Tage trat. In dieser sind ja alle Bewegungszustände des Beobachters, mathematisch ausgedrückt alle Koordinatensysteme, gleichberechtigt, die auseinander durch eine gleichförmige, drehungsfreie Translationsbewegung hervorgehen. Da der Zustand der Ruhe einer Masse keiner besonderen Ursache zu seiner Aufrechterhaltung bedarf, mußte in der klassischen Mechanik dasselbe für den Zustand der gleichförmigen Bewegung angenommen werden, da dieser aus dem Ruhezustand durch eine in der Gruppe der Mechanik enthaltene Transformation hervorgeht. Diese Formulierung des Trägheitsgesetzes der klassischen Mechanik ist wohl nicht die ursprüngliche, sondern trägt bereits der Entwicklung des Gruppenbegriffs in der Mathematik des 19. Jahrhunderts Rechnung.

Die Entwicklung der Elektrodynamik in der gleichen Zeitperiode gipfelte in den partiellen Differentialgleichungen von MAXWELL und H. A. LORENTZ. Es war evident, daß diese die Gruppe der klassischen Mechanik nicht erlaubten, da insbesondere die Unabhängigkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand der Lichtquellen als Konsequenz in ihnen enthalten ist. Mußte man nun die Eigenschaft der Naturgesetze, eine Gruppe zu gestatten, als nur annähernd gültig aufgeben, oder gilt vielleicht die Gruppe der Mechanik nur annähernd und ist diese durch eine allgemeinere, sowohl für mechanische wie für elektro-

magnetische Vorgänge gültige Gruppe zu ersetzen? Die Entscheidung fiel zu Gunsten der zweiten Alternative. Man konnte dieses Postulat auf zwei Wegen erreichen. Erstens konnte man rein mathematisch untersuchen, welches die allgemeinste Transformationsgruppe ist, der gegenüber die damals wohl bekannten Gleichungen der MAXWELL-LORENTZschen Elektrodynamik ihre Form behalten. Diesen Weg beschritt der Mathematiker H. POINCARÉ. Oder man konnte diejenigen physikalischen Annahmen kritisch ermitteln, welche zur besonderen Gruppe der GALILEI-NEWTONschen Mechanik geführt haben. Diesen zweiten Weg beschritt EINSTEIN. Er zeigte, daß vom allgemeinen Standpunkt der Gleichberechtigung aller mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegten Koordinatensysteme die Invarianz der Gleichzeitigkeit räumlich-distanter Ereignisse, wie sie in der klassischen Mechanik angenommen wird, die besondere zusätzliche Voraussetzung der Möglichkeit unendlich großer Signalgeschwindigkeiten einschließt. Läßt man diese fallen und ersetzt sie durch die Annahme einer endlichen maximalen Signalgeschwindigkeit, dann wird auch die Zeit mittransformiert und die Gruppe läßt, mathematisch gesprochen, eine indefinite quadratische Form von vier Dimensionen, drei Raum- und einer Zeitdimension, invariant. Die MAXWELL-LORENTZsche Elektrodynamik erwies sich in der Tat als invariant gegenüber der von EINSTEIN auf Grund dieser allgemeinen Überlegungen ermittelten Transformationsgruppe, wenn die maximale Signalgeschwindigkeit mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum identifiziert wurde. Sowohl EINSTEIN wie POINCARÉ fußten auf den vorbereitenden Arbeiten von H. A. LORENTZ, der dem Ergebnis schon recht nahe gekommen war, ohne es jedoch ganz erreicht zu haben. Ich sehe in der Übereinstimmung der Ergebnisse der unabhängig voneinander von EINSTEIN und POINCARÉ beschrittenen Wege die tiefere Bedeutung einer Harmonie der mathematischen Methode und der Analyse durch Gedankenexperimente, die sich auf allgemeine Züge der physikalischen Erfahrung stützt.

Diese frühen Arbeiten von EINSTEIN über die spezielle Relativitätstheorie zeigten bereits den Erfolg einer Methode in der Physik, die nicht von einem autoritativen Wissen darüber ausgeht, was die Dinge an und für sich sind. EINSTEIN hat uns immer wieder gezeigt, wie der Physiker ohne solche Stützen und ohne feste Regeln in einem uferlosen Meer von Ideen schwimmen lernen muß, von Ideen, zu denen er durch ein ebenso uferloses Meer von empirischem Material zwar inspiriert sein kann, die sich aber aus diesem nicht rein logisch ableiten lassen.

Der Physiker soll nicht a priori wissen was Äther ist, und er befolgt sogar seit EINSTEIN das Gebot „Du sollst dir kein Bildnis machen vom Bewegungszustand des Äthers". Dieser Grundsatz hat eine neue Beleuchtung erfahren in der relativistischen Gravitationstheorie oder allgemeinen

Relativitätstheorie, welche Einstein in den Jahren 1908 bis 1916 allein aufgestellt hat. Die mathematischen Hilfsmittel, die er benützt hat, sind eine Kombination der Riemannschen Krümmungstheorie mit Minkowskis vierdimensional-geometrischer Formulierung der speziellen Relativitätstheorie. Diese wird als Grenzfall im Kleinen beibehalten, im Großen aber verallgemeinernd durch ein Feld ersetzt, bestehend aus zehn stetigen Raumzeitfunktionen, den Koeffizienten der indefiniten quadratischen Differentialform der vierdimensionalen Raum-Zeitwelt. Dies entspricht dem Ideenkreis der Differentialgeometrie gekrümmter Räume, in denen die euklidische Geometrie nur im Kleinen gilt. Die Gruppe ist erweitert zur allgemeinen Gruppe stetig differenzierbarer Koordinatentranformationen, welche jedoch diese quadratische Differentialform als Absolutum invariant zu lassen haben. Diese mathematische Struktur war jedoch das schließliche Resultat, nicht der Ausgangspunkt der Überlegungen Einsteins zur allgemeinen Relativitätstheorie. Dieser ist vielmehr sein Prinzip der Äquivalenz einer gleichförmig beschleunigten Bewegung eines Beobachters und seines Bezugssystems mit einem homogenen Gravitationsfeld. Es beruht auf der exakten Gleichheit von träger und schwerer Masse, die seit Newton bekannt war, aus der jedoch vor Einstein niemand diese Schlußfolgerung gezogen hatte. Das Äquivalenzprinzip garantiert die Harmonie zwischen der mathematischen Struktur des metrischen Feldes der Raum-Zeitwelt, von Einstein kurz als G-Feld bezeichnet, und der Physik der Gravitationseffekte. Diese folgen in der Tat von selbst aus den einfachsten Differentialgesetzen, welche mit der allgemeinen Transformationsgruppe im Einklang sind. An Stelle der einen statischen Poissonschen Differentialgleichung der Newtonschen Theorie folgen die zehn Einsteinschen relativistischen Feldgleichungen, wenn an Stelle des Laplace-Poissonschen Differentialausdruckes auf der linken Seite eine passend gewählte Kombination von zehnkomponentigen Tensoren, aus dem Riemannschen Krümmungstensor durch Kontraktion gebildet, gesetzt wird; auf der rechten Seite der Gleichung an Stelle der Massendichte, Einsteins berühmter Folgerung der Gleichheit von Masse und Energie aus der speziellen Relativitätstheorie Rechnung tragend, der Tensor von Energie und Bewegungsgröße. Dieser wie die Gravitationskonstante bleiben das phänomenologische Element der allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Beziehungen dieser Theorie zur Naturphilosophie und ihrer historischen Entwicklung sind mannigfaltig. Während die Überwindung der aristotelischen Vorstellung der physikalischen Qualität der Raumpunkte und die Verselbständigung des Raumbegriffes in der Zeit von Galilei, Descartes und Newton eine so wesentliche Rolle spielten, ist Einsteins G-Feld eben eine mathematische Darstellung der physikalischen Qualitäten der Raumzeitpunkte. Diese Qualitäten stehen allerdings nicht un-

veränderlich fest, wie der Ort, den die materiellen Körper nach ARISTOTELES suchen, sondern sie sind selbst naturgesetzlich bestimmt und von der Materie abhängig. Das G-Feld, nach EINSTEIN eben der Äther in einer neuen Form, bewahrt jedoch seine begriffliche Selbständigkeit gegenüber der Materie. Wohl hat EINSTEIN wiederholt dargelegt, daß er es als befriedigender empfinden würde, wenn bei Verschwinden der Materie auch das G-Feld identisch verschwinden müßte. Er nannte diesen Grundsatz das „MACHsche Prinzip" zu Ehren von ERNST MACH, der mit seiner Kritik des absoluten Raumes den späteren Gedankengängen der allgemeinen Relativitätstheorie die Wege geebnet hat. Man kann jedoch sagen, daß ohne besondere, schwer zu rechtfertigende Zusatzannahmen aus den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie allein das MACHsche Prinzip nicht folgt. Das Bestehen eines nicht verschwindenden G-Feldes in einer materiefreien Raum-Zeitwelt bleibt nach diesen Gleichungen logisch möglich. Und insofern das G-Feld existiert, ist Raum und Zeit nicht leer.

Die weitere Entwicklung der naturwissenschaftlichen Ideen von Raum und Zeit und deren Abhängigkeit von dem sie erfüllenden Materiellen liegt als offenes Problem in der Zukunft, sowohl hinsichtlich der großen wie der kleinen Dimensionen. Sie hängt eng zusammen mit der Tragweite des nunmehr „klassischen" Feldbegriffes, einer Frage, die EINSTEIN so sehr am Herzen lag. Ich selbst gehöre zu denjenigen Physikern, die in den Grundlagen der heutigen, primäre Wahrscheinlichkeiten postulierenden Quantenmechanik eine Weiterbildung der von EINSTEIN geschaffenen Denkweise erblicken. Spezifizierte, unter Umständen komplementäre Versuchsbedingungen spielen hier die Rolle der spezifizierten Bewegungszustände der Beobachter in EINSTEINS Relativitätstheorie; die Endlichkeit des Wirkungsquantums, welche der Teilbarkeit der Phänomene im Atomaren eine Grenze setzt, spielt die Rolle der maximalen Signalgeschwindigkeit in EINSTEINS spezieller Relativitätstheorie; die alle möglichen Spezifizierungen der Versuchsbedingungen umfassende Gruppe der unitären Transformationen der Quantenmechanik spielt die Rolle der Gruppe der Koordinatentransformationen, welche in der allgemeinen Relativitätstheorie alle möglichen Bewegungszustände der Beobachter und ihrer gesetzmäßigen Aussagen verbindet. Auch in der Quantenmechanik diskutiert man, gestützt auf eine angenommene mathematische Struktur der hier statistischen Naturgesetze, mit Hilfe von Gedankenexperimenten mögliche Messungen, eine Methode, die gerade EINSTEIN in der Physik mit so großem Erfolg angewendet und dadurch wieder modern gemacht hat.

Trotzdem hielt EINSTEIN an dem engeren Wirklichkeitsbegriff der klassischen Physik fest, von dem aus ihm eine Naturbeschreibung, die

gesetzmäßig nicht determinierte Einzelereignisse zuläßt, als „unvollständig“ erscheinen mußte. Er verband damit eine regressive Sehnsucht nicht etwa nach der alten mechanistischen Idee des Massenpunktes, sondern nach seinem geometrisierten Feldbegriff der allgemeinen Relativitätstheorie. Als Motiv seiner Haltung legte er offen dar, daß ihm ein Abweichen von der engeren Wirklichkeitsidee der Physik vor der Quantenmechanik als eine bedenkliche Annäherung an einen Standpunkt erscheine, bei dem man Traum oder Halluzination nicht deutlich genug vom „Wirklichen“ unterscheiden könne. Dagegen erschien uns anderen der objektive Charakter der Naturbeschreibung der Quantenmechanik dadurch genügend gewahrt, daß deren statistische Gesetze reproduzierbare Vorgänge beschreiben und daß die Resultate der Beobachtung, allen zur Kontrolle zugänglich, vom Beobachter nach Wahl seiner Versuchsanordnung nicht beeinflußt werden können.

Die Diskussionen über diese Fragen mögen noch lange fortdauern. EINSTEIN gab zu, daß er die Möglichkeit einer reinen Feldtheorie, die auch die atomistische Struktur der Materie wiedergibt, nicht beweisen könne, hielt aber daran fest, daß auch das Gegenteil, die Unmöglichkeit einer solchen Theorie, nicht bewiesen sei.

Auch Physiker, die wie ich EINSTEINS allgemeiner Einstellung zur heutigen Quantenphysik nicht folgen, können jedoch seine Grundhaltung zu den verschiedenen auf „-ismus“ endenden Richtungen der traditionellen Philosophie leicht annehmen. Er bewertete diese nicht absolut als richtig oder falsch, sondern als relativ zueinander. Nach seiner Meinung kann der Physiker von jeder dieser Richtungen etwas annehmen. In dem ihm gewidmeten Band der „Library of living philosophers" sagt er in seiner „reply to criticisms" (p. 684):

„(The scientist) appears as *realist* insofar as he seeks to describe a world independent of the acts of perception; as *idealist* insofar as he looks upon the concepts and theories as the free inventions of the human spirit (not logically derivable from what is empirically given); as *positivist* insofar as he considers his concepts and theories justfied *only* to the extent to which they furnish a logical representation of relations among sensory experiences. He may even appear as *Platonist* or *Pythagorean* insofar as he considers the viewpoint of logical simplicity as an indispensable and effective tool of his research."

Es fällt mir leicht, mich in diese Sätze einzufühlen, während mir das Denken in „-ismen“ fremd, ja unmöglich ist.

Möge EINSTEINS große synthetische Kraft als Mensch und als Denker auch der Physik der Zukunft ein Vorbild sein, wenn sie das empirisch Gegebene und die mathematisch-logische Struktur der Theorie gegeneinander abzuwägen hat.